Iulian Ghercă

Lidia Mihaela Neculăeș

Neculai Juncă

R. O. S. E.

Romania Secondary Education Project

Proiectul ROSE Bac++

2018 - 2022

Ghid metodologic

Matematică

editura pim

2022

Coordonatori
Iulian Ghercă **Lidia - Mihaela Neculăeş** **Neculai Juncă**

Ghid metodologic

Proiectul privind Învățământul Secundar
(Romania Secondary Education Project)
Proiectul – ROSE Bac++

MATEMATICĂ

editura pim
IAȘI, 2022

editura pim
Editură acreditată CNCSIS – 66/2010
Șoseaua Ștefan cel Mare și Sfânt nr. 109, Iași – 700497
Tel.: 0730.086.676, 0732.430.407
Fax: 0332. 440.715
Email: editura@pimcopy.ro
www.pimcopy.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

Autori: prof. Paiu Ana Maria
prof. Balan Maria
prof. Moglan Dorin Dumitru

Copertă şi desktop publishing: prof. Juncă Neculai

Corector: prof. Juncă Mihaela

Liceul Teoretic *Bogdan Vodă* Hălăuceşti

Proiectul privind Invățământul Secundar
(Romania Secondary Education Project - ROSE)

MATEMATICĂ

SUMAR

Cuvânt înainte

În perioada 2018-2022, în cadrul Liceului Teoretic Bogdan Vodă Hălăucești s-a derulat Proiectul Rose Bac++, din cadrul Proiectului privind învățământul secundar ROSE[1], Schema de granturi pentru licee, cel mai amplu și mai scump proiect din Educație, menit să contribuie la reducerea abandonului în învățământul secundar și terțiar și la creșterea ratei de promovare a examenului de Bacalaureat.

Pentru realizarea obiectivelor propuse, echipa de proiect a organizat atât activități remediale, cât și activități de consiliere, de îndrumare și orientare profesională, de dezvoltarea a abilităților socio-emoționale, precum şi activităţi extracurriculare şi de informare, vizite și excursii de documentare, stagii de pregătire, pentru a asigura exersarea abilităţilor personale şi sociale bazate pe experienţele anterioare, a elementelor specifice mediului din care provin elevii.

Pentru eficientizarea învățării și obţinerea unor performanţe maximale, demersurile didactice s-au focalizat pe valorificarea particularităţilor de microgrup şi a celor individuale prin activități frontale, lucru în perechi și pe echipe, prin activităţi cu fișe de lucru diferențiat.

Prelucrarea şi transformarea pedagogică a cunoştinţelor dobândite după o logică şi o progresivitate determinată, a asigurat transferul pedagogic mediat psihologic şi social în sensul teoriilor psihologice constructiviste, prin investigarea modului în care cunoştinţele asimilate devin utile în studierea altor discipline şi în viaţa cotidiană, prin ilustrarea caracterului aplicativ al cunoştinţelor matematice, prin antrenarea elevilor în activităţi practice, prin selectarea de tehnici şi metode adecvate, prin asigurarea unor mijloace didactice diversificate, în vederea eficientizării învăţării matematicii, pentru formarea şi dezvoltarea competenţelor specifice.

Au fost promovate strategiile didactice centrate pe dezvoltarea capacităţii de autocunoaştere şi de exprimare în manieră pozitivă a intereselor, aptitudinilor, trăirilor personale, abilităţilor de relaţionare. Utilizarea metodelor activ-participative a condus la stimularea flexibilităţii cognitive, la acţiune în planul gândirii, elevii fiind încurajaţi să aibă intervenţii argumentate, să comunice propriile opinii, să adreseze întrebări, să reflecteze asupra temelor

[1] Proiect finanțat dintr-un împrumut de 200 milioane de euro de către Banca Internaţională de Reconstrucție și Dezvoltare (BIRD), care contribuie la reducerea abandonului în învățământul secundar și terțiar și la creșterea ratei de promovare a examenului de bacalaureat. https://www.rose-edu.ro/

puse în discuţie, să manifeste iniţiativă, să exprime idei originale şi emoţii autentice.

Prin cultivarea limbajului matematic, a raţionamentului matematic, a spiritul de receptivitate, prin formarea gândirii logice, elevii au fost dirijați către identificarea modului de organizare a studiului individual cu referire la folosirea manualelor, a revistelor de matematică, a culegerilor de probleme, a unor activități din afara clasei, către investigarea modului în care cunoştintele matematice devin utile în studierea altor discipline şi vieţii cotidiene, a mijloacelor specifice de control a activităţii matematice, a mijloacelor specifice de evaluare a progresului de învăţare, prin formarea şi dezvoltarea capacităţilor de autoevaluare şi autoapreciere ale elevilor, prin susţinerea acestora în descoperirea propriilor valori, a progresului realizat şi crearea cadrului de manifestare a capacităţilor şi competenţelor dobândite în timpul efectuării sarcinilor de învăţare.

Implementarea proiectului a contribuit la reducerea abandonului școlar și la îmbunătățirea semnificativă a rezultatelor obținute de elevii din instituția noastră la examenul de bacalaureat. Dintre cei 28 de elevi din anul terminal înscriși, un număr de 22 de elevi au promovat examenul de bacalaureat. La disciplina matematică, din cei 10 elevi înscriși, opt au promovat examenul, patru dintre aceștia au obținut note peste 8, procentul de promovabilitate fiind de 80%, iar media pe disciplină, de 6,71.

Ghidul metodologic *ROSE - Matematică* realizat în cadrul Proiectului privind învătământul secundar ROSE, Schema de granturi pentru licee conține o serie de materiale care au fost utilizate în pregătirea elevilor de-a lungul celor patru ani de către prof. Ana Maria Paiu, prof. Maria Balan și prof. Dorin Dumitru Moglan, profesorii catedrei de matematică implicați în proiect.

Primele două capitole cuprind fișe de lucru structurate pe patru nivele corespunzătoare celor patru ani de studiu al matematicii, clasa a IX-a și a XI-a – prof. Ana Maria Paiu, iar clasa a X-a și a XII-a – prof. Maria Balan, și sunt însoțite de un argument, de note de prezentare a proiectului, competențele specifice și a conținuturile vizate, în concordanță cu programa școlară, noțiuni teoretice, precum și sugestii metodologice și de rezolvare a exercițiilor propuse. În capitolul al treilea, prof. Dorin Dumitru Moglan prezintă o serie de modele de teste rezolvate și bareme de corectare pentru examenul de Bacalaureat.

Adunând în paginile sale experiența acumulată de-a lungul a patru ani, Ghidul metodologic poate constituie un valoros instrument de lucru în pregătirea examenului de bacalaureat, atât pentru elevi, cât și pentru profesori.

Prof. Neculai Juncă

GHID DE PREGĂTIRE A EXAMENULUI DE BACALAUREAT LA DISCIPLINA MATEMATICĂ

Profesor gr.I Ana-Maria Paiu

Argument

„ Învățând matematică, înveți să gândești”

Grigore Moisil

Credem că nu greşim dacă reamintim tuturor că, aproape zilnic, trebuie să "rezolvăm o problemă", să luăm cel puțin o decizie. A găsi soluția, calea cea bună, înseamnă a gândi.

Matematica ocupă în cadrul Examenului de Bacalaureat statutul de disciplină obligatorie pentru elevii înscriși la Profilul real- Științe ale naturii.

În cadrul programului ROSE am avut ocazia să desfășurăm pe parcursul a patru ani școlari ore de pregătire pentru examenul de bacalaureat. Pregătirea pentru examenul de bacalaureat necesită o muncă susținută, ce nu se poate realiza numai în timpul programului școlar.

Pe parcursul orelor de pregătire am urmărit:

- cultivarea deprinderii cu munca independentă ;
- încurajarea elevilor, prin stimularea încrederii în forțele proprii
- formarea unei gândiri logice şi flexibile
- stimularea capacității elevilor de a se exprima, în limbaj matematic, liber și coerent
- depistarea unor carențe în însușirea unor noțiuni teoretice studiate
- creșterea motivației elevilor pentru studierea matematicii în general .

Prin urmare, consider prezentul ghid un sprijin important pentru toți cei care doresc să recapituleze, să sistematizeze și să evalueze atât noțiunile teoretice, cât și abilitățile de abordare a unor subiecte.

CLASA a IX-a

Notă de prezentare

Trebuie să recunoaștem că deși matematica este una din disciplinele şcolare care traversează întreg ciclul de învățământ preuniversitar, de la grădiniță și până la terminarea liceului, ea este mai dificilă decât celelalte discipline. Și e firesc să ne întrebăm: „Din ce cauză elevul atestă dificultăți de învățare a matematicii?”. Așa dar pot să precizez că proiectul Rose a constituit în ultimii patru ani o oportunitate, bazându-se în special pe, pregătirea suplimentară a elevilor pentru examenul de bacalaureat . Pe parcul derulării acestui proiect în școala noastră s-a constatat o promovabilitate ridicată la examenul de bacalaureat.

Ghidul de față este destinat atât elevilor, cât și cadrelor didactice, care vor să abordeze exercițiile și problemele specifice claselor IX-XII.

Materialul specific clasei a IX-a conține șase capitole. Fiecare capitol este trecut prin două faze, faze care dau consistență ghidului:

- breviarul teoretic – rezumă principalele noțiuni teoretice care recomandă capitolul în discuție
- exerciții și probleme propuse- parte formată din seturi de probleme variate care să corespundă tratării cât mai complete a tematicii propuse.

Competențele specifice vizate la clasa a IX-a sunt:

C.S.1.1. Identificarea în limbaj cotidian sau în probleme de matematică a unor noțiuni specifice logicii matematice și teoriei mulțimilor
C.S.1.2. Recunoașterea unor corespondențe care sunt funcții, șiruri, progresii
C.S.1.3. Identificarea valorilor unei funcții folosind reprezentarea grafică a acesteia
C.S.1.4. Recunoașterea funcției de gradul I descrisă în moduri diferite
C.S.1.7. Identificarea unor elemente de geometrie vectorială în diferite contexte
C.S.1.9. Identificarea legăturilor între coordonate unghiulare, coordonate metrice și coordonate carteziene pe cercul trigonometric
C.S.1.10. Identificarea unor metode posibile în rezolvarea problemelor de geometrie

C.S.2.1. Utilizarea proprietăților operațiilor algebrice ale numerelor, a estimărilor și aproximărilor în contexte variate,
C.S.2.4. Utilizarea unor metode algebrice și grafice pentru rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor și sistemelor
C.S.2.7. Transpunerea unor operații cu vectori în contexte geometrice date
C.S.2.9 Calcularea unor măsuri de unghiuri și arce utilizând relații trigonometrice
C.S.2.10. Aplicarea unor metode diverse pentru determinarea unor distanțe, a unor măsuri de unghiuri și a unor arii
C.S.3.4. Descrierea unor proprietăți desprinse din reprezentarea grafică a funcției de gradul I sau din rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor și sistemelor
C.S.3.8. Alegerea metodei adecvate de rezolvare a problemelor de coliniaritate, concurență sau paralelism
C.S.3.9. Determinarea măsurii unor unghiuri și a lungimii unor segmente utilizând relații metrice
C.S.4.1. Deducerea unor rezultate și verificarea acestora utilizând inducția matematică sau alte raționamente logice
C.S.5.1. Redactarea rezolvării unei probleme, corelând limbajul uzual cu cel al logicii matematice și al teoriei mulțimilor
C.S.5.5. Utilizarea relațiilor lui Viète pentru caracterizarea soluțiilor ecuației de gradul al II-lea și pentru rezolvarea unor sisteme de ecuații .

Conținuturi

1. Capitolul I. Mulțimea numerelor reale

   I.1. Intervale de numere reale, operații cu intervale

   I.2. Modulul unui număr real

   I.3. Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real, aproximări ale numerelor reale

2. Capitolul II. Mulțimi și elemente de logică matematică

   II.1. Operații logice elementare cu propoziții

   II.2. Metoda inducției matematice

3. Capitolul III. Șiruri de numere reale

   III.1. Șiruri de numere reale. Șiruri mărginite. Șiruri monotone

   III.2. Progresii aritmetice

Capitolul I Mulțimea numerelor reale

I.1. Intervale de numere reale, operații cu intervale

Breviar teoretic

Fie $a, b \in R, a \leq b$, se definesc următoarele tipuri de intervale:

- Intervale mărginite : $[a,b] = \{x \in R \ /a \leq x \leq b\}$
  $(a,b) = \{x \in R \ /a < x < b\}$
  $(a,b] = \{x \in R \ /a < x \leq b\}$
  $[a,b) = \{x \in R \ /a \leq x < b\}$
- Intervale nemăginite: $[a,+\infty) = \{x \in R \ /x \geq a\}$
  $(a,+\infty) = \{x \in R \ /x > a\}$
  $(-\infty,a] = \{x \in R \ /x \leq a\}$
  $(-\infty,a) = \{x \in R \ /x < a\}$

Mulțimea R este un interval nemărginit $R = (-\infty,+\infty)$.

Fie I și J intervale de numere reale, se definesc următoarele operații cu intervale de numere reale

- Reuniunea intervalelor $I \cup J = \{x \in R \ /x \in I \ sau \ x \in J\}$
- Intersecția intervalelor $I \cap J = \{x \in R \ /x \in I \ și \ x \in J\}$
- Diferența a două intervale $I \setminus J = \{x \in R \ /x \in I \ și \ x \notin J\}$

Exerciții propuse

1. Verificați dacă următoarele afirmații sunt adevărate:
   $a)\ 1 \in (1,3]$ $b)\ 2 \in [2,4]$ $c)\ 3 \in (-\infty,3)$
   $d) -1 \in [-1,+\infty)$ $e) -2{,}5 \in (-\infty,3)$ $f)\ \sqrt{3} \in (-1{,}2)$

2. Să se scrie sub formă de interval de numere reale următoarele mulțimi:
   $a)\ A = \left\{x \in R \ /x \leq \frac{2}{3}\right\}$ $b)\ B = \left\{x \in R \ /x > -\frac{5}{3}\right\}$
   $c)\ C = \left\{x \in R \ /x < \sqrt{3}\right\}$ $d)\ D = \{x \in R \ /-5 \leq x \leq 4\}$

$e)\ E = \{x \in R\ /-8 \leq 2x < 2\}$ $f)\ F = \{x \in R\ /-5 \leq 4x - 1 \leq 11\}$

3. Determinați mulțimile:
   $a)\ [-1,5] \cap (\pi, \sqrt{31})$ $b)\ (-\infty, -1) \cap [-3, \infty)$ $c)\ (-3,1) \cap [0,3]$

   $d)\ (-\infty, 0) \cup [0, \infty)$ $e)\ (-2,3) \cup \left[-\frac{3}{2}, \frac{7}{3}\right]$ $f) [-1{,}73; \sqrt{2}) \cup (-\sqrt{3}; 1{,}41]$

   $g)\ (-1{,}1] \setminus (-\sqrt{2}, 0]$ $h)\ [0, \infty) \setminus (1, \infty)$ $i)\ R \setminus \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

   .

I.2.Modulul unui număr real

Breviar teoretic

Modulul unui număr real x , notat $|x|$, se definește astfel:

$|x| = \begin{cases} -x, dacă\ x < 0 \\ x, dacă\ \ \ x \geq 0 \end{cases}$ în general $|x - a| = \begin{cases} -x + a, dacă\ x < a \\ x - a, dacă\ \ \ x \geq a \end{cases}$

Proprietăți ale modulului:

$1. |x| \geq 0, oricare\ ar\ fi\ x \in R$ $2. |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

$3. |-x| = |x|, oricare\ ar\ fi\ x \in R$ $4. |x \cdot y| = |x| \cdot |y|\ oricare\ ar\ fi\ x, y \in R$

$5. \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, oricare\ ar\ fi\ x, y \in R, y \neq 0$ $6. \sqrt{x^2} = |x|$

$7. Dacă\ x \in R\ și\ a > 0, atunci\ |x| \leq a\ dacă\ și\ numai\ dacă - a \leq x \leq a.$

$8.\ \ Dacă\ x \in R\ și\ a > 0, atunci\ |x| \geq a\ dacă\ și\ numai\ dacă\ \ x \leq -a\ sau\ x \geq a.$

Exerciții propuse

1. Calculați:

   $a)\ |-3|$
   $b)\ |+0{,}5|$ $e)\ \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right|$

$c)\ |-1|+|-2|-|-3|$ $f)\ \left|-\frac{1}{3}\right|+\left|+\frac{1}{6}\right|+|-0{,}5|$
$d)\ |1-\sqrt{2}|+|2-\sqrt{2}|$

2. Rezolvați în **R** ecuațiile:

   $a)\ |x-1|=2$; $b)\ |2-3x|=1$; $c)\ |3x+7|=4$; $d)\ |-x-1|=-1$;
   e)$|2x-1|=3+x$.
3. Rezolvați în **R** inecuațiile:

$a)\ |x-1|\le 1$ $b)\ |2x+3|<7$ $c)\ |x+3|>1$

$d)\ |2-3x|\ge 4$ $e)\ \left|\frac{x+2}{5}\right|\ge -1$ $f)\ \left|\frac{x+1}{3}\right|\le$
-2
.

I.3. Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real. Aproximări ale numerelor reale

Breviar teoretic

- Fie $x\in R$, cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x, notat $[x]$, se numește partea întreagă a lui x.
- Numărul real $\{x\}=x-[x]$ se numește partea fracționară a lui x .
- Proprietăți :

  1. $x=[x]+\{x\}, \forall\ x\in R$
  2. $x-1\le [x]\le x, \forall\ x\in R$
  3. $[x]=x \ \Leftrightarrow x\in Z$
  4. $[x+k]=[x]+k \ \Leftrightarrow k\in Z$

  1. $\{x\}\in[0,1),\ \ \forall\ x\in R$
  2. $\{x\}=0 \Leftrightarrow x\in Z$
  3. $\{x\}=\{y\} \ \Leftrightarrow x-y\in Z$
  4. $\{x+n\}=\{x\} \ \Leftrightarrow n\in Z.$

Exerciții propuse

1. Să se determine *partea întreagă și partea fracționară* a numerelor:

   $a=12{,}05$; $b=-12{,}05$; $c=\frac{124}{5}$; $d=2\sqrt{7}$; $e=-2,(6)$.
2. Calculați :

$a)\ [\sqrt{1313}] + 5 \cdot \left\{-\frac{1}{10}\right\}$

$b)\ [\sqrt{12345}] + (2+\sqrt{3}) \cdot \{-\sqrt{3}\}$

$c)\ \left[\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{11+6\sqrt{2}}\right]$

3. Să se rezolve ecuațiile:

   $a)\ [x] = 2$

   $b)\ [x-3] = 1$

   $c)\ [x+2] = -3$

   $d)\ [x+1] = 2x-1$

4. Scrieți aproximările până la 3 zecimale, prin lipsă și prin adaos, pentru numerele:

   $a = \frac{5}{11};\ b = \sqrt{5};\ c = -3\frac{5}{6};\ d = \frac{48}{49};\ e = -\sqrt{7};\ f = \pi$.

Capitolul II Mulțimi și elemente de logică matematică

II.1. Operații logice elementare cu propoziții

Breviar teoretic

- *Negația* unei propoziții p , propoziția notată $\bar{p}$, care este adevărată atunci când p este falsă și este falsă atunci când p este adevărată.
- *Conjuncția* propozițiilor p *și* q este propoziția notată $p \wedge q$ și care este adevărată atunci când ambele propoziții sunt adevărate și falsă în rest.
- *Disjuncția* propozițiilor p *și* q este propoziția notată $p \vee q$ și care este adevărată atunci când cel puțin una dintre cele două propoziții este adevărată și falsă în rest.
- *Implicația* propozițiilor p *și* q este propoziția notată $p \rightarrow q$ care este falsă atunci când p este adevărată și q este falsă și este adevărată în rest.
- *Echivalența* propozițiilor p *și* q este propoziția notată $p \leftrightarrow q$, care este o propoziție adevărată atunci când ambele propoziții au aceeași valoare de adevăr și este falsă în rest.
- O expresie cere este adevărată oricare ar fi valorile de adevăr ale propozițiilor se numește *tautologie.*

Exerciții propuse

1. Stabiliţi valoarea de adevăr a predicatelor:
   $p_1(x)$:”$|x - 1| = 2, x \in Z$”;
   $p_2(x)$:”$4x(x + 4) + x = 6(1 - x), x \in Q - Z$”;
   $p_3(x)$:”$2(x - 2) < 3x + 5, x \in Z - N$”;
   $p_4(x)$:” $\frac{y-3}{2} > \frac{1+5y}{2}, y \in R$;
   $p_5(x)$:”$2^{x+2} = 16^2$, $x \in R$.

2. Se consideră predicatele: $\begin{cases} p(n): "n \mid 24, n \in N" \\ q(x): "\dfrac{12}{x+2} \in N, x \in N" \end{cases}$;

   a) determinaţi propoziţiile particulare: p(2), p(4), p(5), p(10), p(48), q(2), q(3), q(10), q(12) şi valoarea lor de adevăr;

   b) precizaţi universul şi mulţimea de adevăr a predicatului p(n), respectiv q(n).

3. Verificaţi că, următoarele formule sunt tautologii:

   a) $\neg(p \wedge \neg p)$; b) $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow p$; c) $p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$

   d) $\left(p \vee (q \wedge r)\right) \leftrightarrow \left((p \vee q) \wedge (p \vee r)\right)$.

II.2. Metoda inducției matematice

Breviar teoretic

- *Principiul inducției matematice* - Fie $P(n)$ un enunț matematic care depinde de un număr natural n și care îndeplinește condițiile:
  a) $P(0)$ este o propoziție adevărată
  b) Dacă $P(k), k$ este un număr natural oarecare, este propoziție adevărată rezultă că și propoziția $P(k+1)$ este adevărată.

Atunci $P(n)$ este un enunț adevărat pentru orice număr natural n.

- *Metoda inducției matematice*

  Demonstrația prin metoda inducției matematice a propoziției: ” $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq m, m$ număr natuarl fixat” are două etape:
  1. Etape de verificare : se verifică faptul că $P(m)$ este propoziție adevărată
  2. Etapa de demonstrație : se demonstrează implicația

Exerciții propuse

1. Demonstrați prin inducție matematică egalitățile, $\forall\, n \in N^*$:

a) $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$
b) $2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$
c) $1^2+2^2+3^2+\cdots n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
d) $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$
e) $1+3+5+\cdots+2n-1=n^2$
f) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

2. Demonstrați că pentru orice $n\in N^*$ sunt adevărate relațiile:
   a) (n^3-n) se divide cu 6
   b) (13^n-1) se divide cu 6
   c) $(9^{n+1}-8n-9)$ se divide cu 16
   d) $10^{n+1}-9n+17$ este divizibil cu 27.

3. Demonstrați inegalitățile:
   a) $2^n>n^2, n\in N, n\geq 5$
   b) $2^n>n^3\ \ , n\in N, n\geq 10$
   c) $3^n\geq 2(n+1)^2, n\in N$
   d) $n^2>5n+10, n\geq 7$

Capitolul III Șiruri de numere reale

III.1. Șiruri de numere reale. Șiruri mărginite. Șiruri monotone.

Breviar teoretic

- Un șir de numere reale reprezintă o succesiune de numere reale $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ realizată după o anumită regulă, fiecare număr ocupând un loc bine determinat.

Prescurtat, șirul de numere reale $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ se notează $(a_n)_{n\geq 1}$ sau (a_n).

Elementele $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ se numesc termenii șirului, iar elementul a_n se numește termenul general al șirului.

- Un șir de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ se numește:
  a) Mărginit inferior dacă există un număr real m astfel încât $m \leq a_n,\ \forall\, n \geq 1$
  b) Mărginit superior dacă există un număr real M astfel încât $a_n \leq M,\ \forall\, n \geq 1$
  c) Mărginit dacă este mărginit inferior și superior, adică există $m, M \in R$ astfel încât $m \leq a_n \leq M, \forall\, n \geq 1$.

Obs.1 Un șir de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit dacă și numai dacă există un număr real
$M > 0$ astfel încât $|a_n| \leq M$ pentru orice $n \geq 1$.
Obs.2 Șirurile care nu sunt mărginite se numesc șiruri nemărginite.

- Un șir de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ se numește:
  a) crescător (respectiv strict crescător) dacă $a_n \leq a_{n+1}$ (respectiv $a_n < a_{n+1}$), $\forall\, n \geq 1$
  b) descrescător (respectiv strict descrescător) dacă $a_n \geq a_{n+1}$ (respectiv $a_n > a_{n+1}$), $\forall\, n \geq 1$
  c) monoton (respectiv strict monoton) dacă este crescător sau descrescător (respectiv strict crescător sau strict descrescător).

Exerciții propuse

1. Scrieți primii cinci termeni ai șirului cu termenul general:

a) $a_n = 4n - 3$
b) $b_n = \frac{2n-1}{n+2}$ $,n \geq 1$
c) $c_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ $,n \geq 1.$

2. Determinați formula termenului general pentru următoarele șiruri definite descriptiv:
   a) $1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, \cdots$
   b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \cdots$
   c) $\frac{1}{1\cdot3}, \frac{1}{2\cdot4}, \frac{1}{3\cdot5}, \frac{1}{4\cdot6} \cdots$
3. Să se studieze mărginirea următoarelor șiruri:
   a) $a_n = \frac{4}{n+3}$ $,n \geq 1$
   b) $a_n = 2n + 3$
   c) $a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$
4. Să se studieze monotonia șirurilor definite prin:
   a) $a_n = 5n - 2$
   b) $a_n = \frac{3n+2}{n+1}$
   c) $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2n}$.
5. Fie șirul $a_n = \frac{3n-1}{n+2}$, $n \geq 1$.
   a) Precizați care dintre numerele 2 , 7, $\frac{41}{16}$ sunt termeni ai șirului .
   b) Stabiliți monotonia șirului .
   c) Arătați că șirul este mărginit.

III.2. Progresii aritmetice

Breviar teoretic

- Șirul de numere reale $(a_n)_{n\geq1}$ este o progresie aritmetică de rație r, dacă $a_{n+1} - a_n = r, \forall\ n \geq 1$(diferența oricăror doi termeni consecutivi este constantă).
- Proprietăți ale progresiei aritmetice

a) $a_n = a_1 + (n-1)r \ ,\forall\, n \geq 1$ (formula termenului general)

b) $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} \ ,\forall\, n \geq 2$

c) $S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}, \quad \forall\, n \geq 1$ (suma primilor n termeni).

Exerciții propuse

1. Să se verifice dacă șirurile următoare reprezintă o progresie aritmetică:
   a) $a_n = 4n - 1,\ n \geq 1$
   b) $a_n = \frac{1}{n},\ n \geq 1.$
2. Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică de rație r, calculați:
   a) a_{20} știind că $a_1 = 1, r = 2.$
   b) a_1, a_{20} știind că $a_{30} = 30, r = 4.$
   c) a_1, r știind că $a_3 = -4, a_4 = -2.$

3. Să se determine primul termen şi raţia progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ în fiecare din următoarele situaţii:
   a) $a_2 + a_4 = 14$ și $a_3 + a_5 = 18$
   b) $\begin{cases} a_3 + a_7 = 2 \\ S_8 = 4 \end{cases}$.
4. Să se determine numărul real x, ştiind că numerele următoare sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice:
   a) $2x - 1, 2x + 1$ $și$ $2x + 3.$
   b) $3,\ x + 1$ $şi$ x^2 .

5. Măsurile unghiurilor unui triunghi dreptunghic sunt în progresie aritmetică. Dacă ipotenuza are lungimea 10 cm aflaţi perimetrul şi aria triunghiului.

III.3. Progresii geometrice

Breviar teoretic

- Şirul de numere reale $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică de rație q, dacă $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$, (raportul oricăror doi termeni consecutivi este constantă).
- Proprietăți ale progresiei geometrice
  d) $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $\forall\, n \geq 1$ (formula termenului general)
  e) $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, $\forall\, n \geq 2$
  f) $S_n = \begin{cases} b_1 \frac{q^n - 1}{q-1} & , q \neq 1 \\ nb_1, & q = 1 \end{cases}$ (suma primilor n termeni).

Exerciții propuse

1. Fie progresia geometrică: 2, 6, 18, b_4, b_5,...
   Determinaţi raţia şi termenii b_4, b_5.
2. Fie numerele strict pozitive $x-1$, x, $x+3$ în progresie geometrică. Să se determine x.
3. Să se determine primii doi termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$ ştiind că $b_9 = 256$ şi $q = 4$.
4. Într-o progresie geometrică se cunosc $b_1 = 9$ şi $q = -1/3$. Să se determine suma primilor 7 termeni.
5. Într-o progresie geometrică se cunosc $b_1 = 125 b_2$ şi $S_4 = 312$. Să se determine primul termen şi raţia.
6. Să se calculeze suma: $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{50}$.
7. Să se determine $x \in R$, astfel încât fiecare din tripletele următoare, să fie format din numere în progresie geometrică:
   a) $3x+1;\ x+3: 9-x;$
   b) $4, 3+x;\ x^2+5x+4;\ 25.$

8. Fie şirul cu termenul general $b_n = 3\left(\sqrt{2}\right)^n$.

a) Stabiliţi dacă şirul este o progresie geometrică, calculând apoi primii cinci termeni.

b) Stabiliţi care din numerele: 81; 24; 96 este termen al şirului.

9. Determinaţi primul termen b_1 şi raţia q, a unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq1}$, dacă se verifică

relaţiile: $\begin{cases} b_2 + b_5 - b_4 = 10 \\ b_3 + b_6 - b_5 = 20 \end{cases}$.

10. Suma a trei numere în progresie aritmetică, este egală cu 21. Dacă 2, 3 şi 9 se adună acestor numere, se obţin alte trei numere în progresie geometrică. Determinaţi aceste trei numere.

Capitolul IV. Funcții

IV. 1. Produsul cartezian. Noțiunea de funcție

Breviar teoretic

- Se numește produs cartezian al mulțimilor nevide A, B mulțimea notată $A \times B$ a perechilor ordonate având primul element din A și al doilea element din B.
  $A \times B = \{(a,b)/a \in A \text{ și } b \in B\}$.
- Fie A și B două mulțimi nevide. Spunem că $f: A \to B$ este o funcție dacă oricărui element $x \in A$ îi corespunde un unic element $f(x) \in B$.
  A se numește domeniul funcției f, iar B se numește codomeniul funcției f.
- Două funcții sunt egale dacă au același domeniu, același codomeniu și aceeași lege de definiție.
- Graficul funcției $f: A \to B$ este mulțimea $G_f = \{(x, f(x))/x \in A\} \subset A \times B$.

a) $G_f \cap OX = \{M(x,0)/f(x) = 0\}$

b) $G_f \cap OY = \{N(0,y)/y = f(0)\}$

- Imaginea funcției $f: A \to B$ sau mulțimea valorilor funcției f este mulțimea
  $Im\, f = \{f(x)/x \in A\}$.
- Fie $f: A \to B$ o funcție și $Y \subset B, atunci\ \ f^{-1}(Y) = \{x \in A/f(x) \in Y\}$ se numește preimaginea mulțimii Y prin funcția f.
- $M(x,y) \in G_f \Leftrightarrow f(x) = y$.

Exerciții propuse

1. Calculați $A \times \mathrm{B}$ în cazurile următoare:
   a) $A = \{-1,0\}$ și $B = \{2,3\}$
   b) $A = \{2,3\}$ și $B = \{-1,0,1\}$
   c) $A = \left\{x \in Z/\frac{3x+2}{x-1} \in Z\right\}$ și $B = \left\{x \in Z/\frac{6x-8}{2x+1} \in Z\right\}$.

2. Fie funcția $f: N \to N$, $f(x) = x + 1$.
   a) Calculați următoarele valori : $f(1), f(1), f(5), f(9) + f(11)$
   b) Determinați imaginile următoarelor mulțimi : $A = \{1,2\}, B = \{0,3,5\}, C = N$.
   c) Determinați preimaginile următoarelor mulțimi : $A = \{1,2\}, B = \{0,3,5\}, C = N$.
   d) Calculați următoarea sumă $S = f(0) + f(1) + \cdots + f(99)$.

3. Fie $f: R \to R$, $f(x) = \begin{cases} 2x, & dacă\ x \leq 0 \\ 3x - 1, & dacă\ x > 0 \end{cases}$.
   a) Determinați imaginile prin funcția f ale următoarelor mulțimi : $A = [-3,-1]$,
   $B = [2,3], C = [-3,3]$
   b) Determinați preimaginile următoarelor mulțimi : $A = [-6,-4], B = [8,59]$,
   $C = [-3,5]$.

4. Reprezentați grafic următoarele funcții:
   a) $f: \{-1, 0, 1\} \to \{0,1,2\}, f(x) = x + 1$
   b) $f: \{-2, -1, 0, 1,2\} \to \{0,1,4\}, f(x) = x^2$
   c) $f: \{-2, -1, 0, 1,2\} \to R, f(x) = |x + 1|$.

5. Fie funcția $f: (-3,3] \to R, f(x) = 2x + 1$. Care dintre următoarele puncte aparțin graficului funcției f : $A(1,3); B(2,5); C(-3,-5); D(3,7); E\left(\frac{3}{2}, 3\right); F\left(-\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \sqrt{3}\right); G\left(-\frac{3}{2}, -3\right)$.

6. Determinați $m \in R$, astfel încât:
   a) Punctul $A(1, m)$ să aparțină graficul funcției $f: Z \to Z, f(x) = x + 3$.

b) Punctul $B(m,1)$ să aparțină graficul funcției $f: Z \to Z, f(x) = x - 2$.

c) Punctul $D(m,m)$ să aparțină graficul funcției $f: R \to R, f(x) = 2x - 1$.

IV.2. Proprietăți generale ale funcțiilor

Breviar teoretic

- O funcție $f: A \to R$ este *mărginită* dacă mulțimea $f(A)$ este mărginită, adică există $a, b \in R, a < b$ astfel încât $a < f(x) < b, x \in A$.
- O funcție $f: A \to R$ *monotonă* dacă este crescătoare sau descrescătoare.
- Fie $A \subset R$ o mulțime nevidă simetrică față de origine.
  a) Funcția $f: A \to R$ este funcție pară dacă $f(-x) = f(x), \forall x \in A$.
  b) Funcția $f: A \to R$ este funcție impară dacă $f(-x) = -f(x), \forall x \in A$.
- Dreapta $x = m$ este axa de simetrie pentru graficul funcției $f: A \to R$ dacă și numai dacă
  $f(x) = f(2m - x), \forall\, x \in A$.
- Graficul funcției $f: A \to R$ este simetric față de punctul $P(a,b)$ dacă și numai dacă
  $f(x) + f(2a - x) = 2b, \forall\, x \in A$.

Exerciții propuse

1. Să se arate că următoarele funcții sunt mărginite:
   a) $f: \{-1,0,1,2,3,4\} \to R, f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
   b) $f: [1,3] \to R, f(x) = 7x + 1$
   c) $f: [-3,-2] \to R, f(x) = -x^2$

2. Să se arate că următoarele funcții sunt nemărginite:
   a) $f: [3, +\infty) \to R, f(x) = -3x + 2$
   b) $f: (-\infty, 2) \to R, f(x) = 5x - 3$

3. Studiați monotonia funcțiilor următoare :
   a) $f : R \to R, f(x) = 3x - 4;$
   b) $f: R \to R, f(x) = -2x + 4$
   c) $f: R \to R, f(x) = x^3 + 5x + 4$
   d) $f: (0, +\infty) \to R, f(x) = \frac{x}{x+1}$

4. Stabiliți care din funcțiile $f: R \to R$ sunt pare și care impare știind că:

a) $f(x) = -7x$
b) $f(x) = 4x^2 - 7x^4$
c) $f(x) = \frac{x^3}{5}$

5. Să se arate că dreapta $x = 2$ este axă de simetrie a graficului funcției $f: R \to R$,
   $f(x) = 3x^2 - 12x + 7$

6. Să se arate că dreapta $x = 72$ este axă de simetrie a graficului funcției $f: R \to R$,
   $f(x) = x^2 - 7x + 15$.

IV.3 Funcția de gradul I

Breviar teoretic

- Fie $a, b \in R, a \neq 0$. Funcția $f: R \to R, f(x) = ax + b$ se numește funcție de gradul întâi cu coeficienții a, b.
- Dacă $a \neq 0$, $b = 0$, funcția de gradul I $f(x) = xa$ se numește funcție liniară.
- Dacă $a = 0, b \neq 0$, funcția $f(x) = b$ se numește funcție constantă.
- Curba reprezentativă a unei ecuații de gradul I este o dreaptă.
- $G_f \cap OX = \left\{A\left(-\frac{b}{a}, 0\right)\right\}$, $G_f \cap OY = \{B(0, b)\}$.
- Funcția de gradul I, $f: R \to R, f(x) = ax + b, a \neq 0$ este strict monotonă pe R.

a) Dacă $a > 0$, funcția f este strict crescătoare pe R
b) Dacă $a < 0$, funcția f este strict descrescătoare pe R.

- Semnul funcției de gradul I este dat de tabelul de semn, $\forall\ a \in R^*$

x	-∞ $-\frac{b}{a}$ +∞
$f(x) = ax + b$	Semn contrar semnului lui a 0 semnul lui a

Exerciții propuse

1. Să se determine funcția de gradul I $f: R \to R$, știind că :
   a) $f(\sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2}$ și $f(\sqrt{6}) = \sqrt{3}$
   b) Graficul funcției conține punctele $A(1,4)$ $și$ $B(-2,7)$
   c) $f(x-1) + f(x+1) = 2x + 2, \forall x \in R$

2. Fie funcția $f: R \to R, f(x) = 2x + m$. Determinați valorile parametrului real $m \in R$ în următoarele cazuri :

a) Graficul funcției conține punctul $A(2,5)$.
b) Graficul funcției conține punctul $B(m, 9)$.
c) Graficul funcției conține punctul $C(1,2m)$.
d) Graficul funcției conține punctul $A(m+1, -m^2)$.

3. Fie funcția $f: R \to R, f(x) = x + 2$. Determinați :
   a) Intersecțiile graficului funcției cu axele de coordonate
   b) Aria triunghiului determinat de graficul funcției și axele de coordonate
   c) Distanța de la originea sistemului de coordonate la graficul funcție.

4. Determinați coordonatele punctului de intersecție al graficelor funcțiilor $f, g: R \to R$ și aria triunghiului format de graficele celor două funcții și axa OX, în următoarele cazuri :
   a) $f(x) = -2x - 1$ *și* $g(x) = 2x - 5$
   b) $f(x) = x + 2$ *și* $g(x) = -x + 2$.

5. Să se alcătuiască tabelul de semn pentru $f: R \to R$ în situațiile:
   a) $f(x) = 2x + 1$
   b) $f(x) = 3x - 6$
   c) $f(x) = -2x + 3$
   d) $f(x) = -4x + 2$
6. Să se studieze monotonia funcțiilor $f: R \to R$ în raport cu parametrul real m :
a) $f(x) = (m - 1)x + 2$
b) $f(x) = (2 - m)x - 3$
c) $f(x) = (4 + m)x + m$.
7. Să se studieze monotonia funcțiilor $f: R \to R$ știind că graficul funcției conține punctul dat:
   a) $f(x) = mx + 3,\ A(2,7)$
   b) $f(x) = (m^2 - 1)x - 4m,\ \ A(2,14)$.
   c) $f(x) = (2m + 1)x + 3m^2 - m\ ,\ A(-m, 3)$.

8. Funcția $f: R \to R, f(x) = mx + 6m - 1$ este funcție strict descrescătoare. Să se determine $m \in R$ astfel încât punctul $A(4m - 5, m)$ să fie situat pe graficul funcției.

9. Funcția $f: R \to R, f(x) = (m + 1)x - 9$ este funcție strict crescătoare. Pentru ce valori ale lui $m \in R$ punctul $A(m - 2, m - 3)$ este situat pe graficul funcției.

10. Să se rezolve următoarele sisteme de ecuații, și să se interpreteze geometric soluția lui:

a) $\begin{cases} 7x + 10y = 3 \\ 2x - 5y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 15y = 1 \\ x + 5y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -6x - 9y = -15 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 3y + 28 = 0 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y - 7 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3(x+2) - 2(y-1) = -1 \\ 2(2-x) + 4(y-x) = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \frac{3-2(x-y)}{4} - \frac{2x-5y}{2} = 1 \\ -x + 2y = \frac{1}{6} \end{cases}$

IV.4. Funcția de gradul al II-lea

Breviar teoretic

- O funcție $f: R \to R, f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0, a, b, c \in R$ se numește funcție de gradul al doilea.
- Forma canonică a funcției de gradul al II-lea $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$, $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Intersecția graficului funcției cu axele OX, OY

a) $G_f \cap OX$, se rezolvă ecuația $f(x) = 0$

$i)\ \Delta > 0\ \ A(x_1, 0), B(x_2, 0)$

ii) $\Delta = 0, A\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$

iii) $\Delta < 0$, nu există puncte de intersecție.

b) $G_f \cap OY$, $C(0, c)$.

- Punctul de extrem al graficului funcției este $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.
  - a) $a > 0$, punctul V este punct de minim
  - b) $a < 0$, punctul V este punct de maxim.
- Dreapta de ecuație $x = -\frac{b}{2a}$ axă de simetrie.
- Mulțimea valorilor funcției f : dacă $a > 0, Imf = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$, iar dacă $a < 0, Imf = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$.
- Aspectul geometric al curbei G_f: dacă $a > 0$ aspectul este convex, dacă $a < 0$, aspect concav.
- Relațiile lui Viete $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$, unde x_1, x_2 soluțiile ecuației de gradul al II-lea.

Exerciții propuse

1. Să se determine funcția de gradul al doilea dacă:
   a) $f(1) = 0$, $f(0) = 1, f(-1) = 8$
   b) $f\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{3}\right) = 0, f(1) = -4.$

2. Fie funcția $f: R \to R, f(x) = 2x^2 + 4x + 5$ se cere:
   a) Vârful parabolei
   b) Imaginea funcției
   c) Forma canonică
   d) Punctele de intersecție a graficului funcției cu axele de coordonate.

3. Fie funcția $f: R \to R, f(x) = -x^2 + 6x - 9$ se cere:
    a) Vârful parabolei
    b) Imaginea funcției
    c) Forma canonică
    d) Punctele de intersecție a graficului funcției cu axele de coordonate.

4. Să se determine punctul de extrem al graficului funcției $f: R \to R$ în cazul
    a) $f(x) = 5x^2 - 6x - 1$
    b) $f(x) = -3x^2 + 9$
    c) $f(x) = 4 - 16x^2$

5. Să se determine axa de simetrie a graficului funcției $f: R \to R$ în cazul:
    a) $f(x) = -5 - 4x + 3x^2$
    b) $f(x) = x(1 - x) + 4x(x + 2) + 1$
    c) $f(x) = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) + 2x.$

6. Să se reprezinte grafic funcțiile $f: R \to R$ în cazul :
    a) $f(x) = x^2 - 4x - 12$
    b) $f(x) = -x^2 + 2x + 24$
    c) $f(x) = 2x^2 - 6x$
    d) $f(x) = -2x^2 + 2.$

7. Fie ecuația $x^2 - 7x + 3 = 0$ cu rădăcinile $x_1 \, și \, x_2$. Fără a rezolva ecuația , calculați valoarea expresiilor:
    a) $x_1 + x_2$
    b) $x_1^2 + x_2^2$
    c) $x_1^3 + x_2^3$
    d) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

e) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

f) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

g) $\frac{x_1+1}{x_{2+1}} + \frac{x_2+1}{x_1+1}$.

8. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x \cdot y = -10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x \cdot y = -11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = -3 \\ x \cdot y = \frac{5}{4} \end{cases}$.

9. Se consideră ecuația $mx^2 - (4m - 1)x + 3m - 2 = 0$.

a) Să se arate că ecuația are soluții reale pentru orice $m \in R$.

b) Să se determine $m \in R^*$ astfel încât $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2m - 3$.

10. Să se rezolve ecuațiile cunoscând o soluție:

a) $3x^2 + (m^2 - 3m)x - 4 = 0, \quad x_1 = -2$

b) $(m^2 + 6)x^2 - (3m - 1)x + m - 2 = 0, \quad x_1 = -1$.

11. Să se formeze ecuația de gradul al doilea care are soluțiile :

a) $-\frac{3}{2}$,$\frac{5}{3}$

b) $1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}$

c) $3m$,$4 - 2m$.

12. Să se rezolve următoarele sisteme și să se interpreteze geometric:

a) $\begin{cases} x - 4 = y \\ x^2 - 4x = y \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 5 = y \\ -x^2 + 3x + 4 = y \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5 = y \\ -x^2 + 4x = y \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = x^2 - 5x + 6 \\ y = -7x + 5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = x^2 - 5x + 6 \\ y = \frac{4}{3}x - 8 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -x^2 + 8x - 16 = y \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} -x^2 + 8x - 16 = y \\ 3x - 4y + 12 = 0 \end{cases}$.

13. Rezolvați următoarele sisteme de ecuații:

a) $\begin{cases} x^2 - 2x = y \\ -x^2 + 4x = y \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x^2 - 6x = y \\ -x^2 - 2x - 1 = y \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + 1 = y \\ -x^2 + 2x - 1 = y \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - 2x = y \\ -x^2 + 4x = y \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x^2 + 6x + 5 = y \\ 7x^2 - 12x + 18 = y \end{cases}$

f) $\begin{cases} y = (x+5)(x-4) + 3(x-3)(x+2) \\ y = 2(x+9) + (x+2)^2 \end{cases}$.

V. Vectori în plan

Breviar teoretic

- Regula triunghiului: dacă A, B, C sunt puncte din plan, atunci $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- Regula paralelogramului: în paralelogramul $ABCD$, are loc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
- Dacă M este mijlocul segmentului $[AB]$, pentru orice punct O din plan are loc relația $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$.
- Vectorii $\vec{u}, \vec{v}$ sunt coliniari dacă există $\alpha \in R^*$ unic, astfel încât $\vec{v} = \alpha\vec{u}$.

- Vectorul $\overrightarrow{r_A} = \overrightarrow{OA}$ se numește vectorul de poziție al punctului A în raport cu O.
- Dacă G este centru de greutate al $\Delta\, ABC$ atunci $\overrightarrow{r_G} = \frac{\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}}{3}$.

Probleme propuse

1. Fie P, Q, R, S mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA ale paralelogramului $ABCD$. Să se calculeze: $\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CS}$.

2. În planul triunghiului ABC se consideră punctele M, N, P astfel încât

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}\ , \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AC}\ ,\ \overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{BC}\ .$$

a)Realizați desenul. Să se calculeze vectorul $\overrightarrow{MP}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$.

b)Să se calculeze vectorul $\overrightarrow{MN}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$.

3. Fie E, F, G, H mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA ale paralelogramului $ABCD$. Să se calculeze: $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CH}$.

4. În planul triunghiului ABC se consideră punctele P, Q, R astfel încât

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}\ , \overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AC}\ ,\ \overrightarrow{CR} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{BC}\ .$$

a)Realizați desenul. Să se calculeze vectorul $\overrightarrow{PR}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$.

b) Să se calculeze vectorul $\overrightarrow{PQ}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$.

5. Se consideră un triunghi ABC, punctele M, N, P mijoacele segmentelor $[BC], [AC], [AB]$ şi D, E, F mijloacele segmentelor $[MN], [NP], [MP]$.

a) Să se calculeze $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}$. și $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$.

b) Să se arate că pentru orice punct O din plan are loc egalitatea:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$$

6.Fie ABC un triunghi și punctele $M \in AB, N \in AC$. Atunci dreapta MN este paralelă cu BC dacă punctele M și N împart segmentele $[AB]$ și $[AC]$ în același raport.

VI. Elemente de trigonometrie și aplicații în geometrie

VI.1.Cercul trigonometric. Formule de reducere la primul cadran.

Breviar teoretic

- Cercul orientat, cu centrul în originea reperului cartezian și cu raza egală cu 1 se numește cerc trigonometric.
- Radianul reprezintă măsura unui unghi la centru care subîntinde un arc de cerc de lungime egală cu raza cercului. Orice cerc are măsura de 2π radiani.
- Semnul funcțiilor trigonometrice

Funcția	Cadranul I $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	Cadranul II $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	Cadranul III $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$	Cadranul IV $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
Reducerea la primul cadran	x	$\pi - x$	$x - \pi$	$2\pi - x$
$\sin x$	+	+	-	-
$\cos x$	+	-	-	+
$tg\ x$	+	-	+	-
$ctg\ x$	+	-	+	-

- $\sin(2\pi + x) = \sin x; \cos(2\pi + x) = \cos x\ ; tg\ (2\pi + x) = tg\ x;$

  $ctg\ (2\pi + x) = ctg\ x,\ \ \forall\ x \in R.$

- Formula fundamentală a trigonometriei $sin^2x + cos^2x = 1, x \in R$.

Probleme propuse

1. Specificați în ce cadran trigonometric sunt situate unghiurile cu măsurile de :

$40°, 80°, 110°, 160°, 200°, 264°, 300°, 359°, 480°, 550°, 700°, -50°, -100°, -370°, -1000°$.

2. Specificați în ce cadran trigonometric sunt situate unghiurile cu măsurile de :

$\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{11}, \frac{4\pi}{7}, \frac{5\pi}{9}, \frac{11\pi}{10}, \frac{13\pi}{11}, \frac{7\pi}{4}, \frac{23\pi}{12}, \frac{7\pi}{3}, \frac{19\pi}{6}, \frac{29\pi}{7}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{6\pi}{7}, -\frac{11\pi}{3}$.

3. Să se stabilească semnul numerelor:

a) $\sin\frac{273\pi}{11}$ b) $\cos\frac{2143\pi}{20}$

$c)\ tg\ \frac{3172\pi}{11}$ d) $ctg\ \frac{287\pi}{3}$.

4. Să se reducă la primul cadran :

a) $\sin 390°$ b) $\sin 750°$ c) $\cos 750°$

b) $d)\ tg\left(907\frac{\pi}{3}\right)$ e) $ctg\left(601\frac{\pi}{3}\right)$ f) $\sin\left(\frac{2000\pi}{11}\right)$

5. Demonstrați următoarele egalități

a) $\frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1+\sin x}$

b) $\frac{tg\ x}{1-ctg\ x} + \frac{ctg\ x}{1-tgx} = 1 + tgx + ctgx$.

6. Să se determine valorile numerice ale expresiilor:

a) $2\sin 30° + 5tg\ 60° + 6tg45°$

b) $\frac{\cos 60°}{1+\sin 60°} + \frac{1}{tg30°}$

c) $\frac{\sin 390°+\cos 390°+tg450°}{sin405°+\cos 405°+tg390°-\sqrt{2}}$

d) $2\cos 30° - 4\cos 405° + tg\ 420°$

e) $5tg201° + \mathrm{ctg}405° + 2\mathrm{tg}(-45°) + 2\mathrm{c0s}\ 780°$

f) $\frac{2\cos 765°-\sin 810°+tg\ 1125°-\sin 765°}{\cos 900°+\cos 780°+\sin 750°+\sin 960°}$.

7. Arătați că au loc următoarele identități
   a) $\sin x \cdot \cos x = \frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{2}$
   b) $(1+\sin x)^2 + (1+\cos x)^2 - 2(sinx + \cos x) = 3$
   c) $(1+\sin x+\cos x)^2 = 2(1+\sin x)(1+\cos x)$
   d) $\frac{\sin x+\sin y}{\cos x+\cos y} + \frac{\cos x-cosy}{\sin x-\sin y} = 0$
   e) $1-2sin^2 x = 2cos^2 x - 1$.

8. a) Știind că $\sin x = \frac{4}{5}$ calculați $\cos x, tg\ x, ctg\ x$ $, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
   b) Știind că $ctg\ x = -\frac{12}{35}$ calculați $\sin x$ $,\cos x$ $, tg\ x$ $, x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

9. Se consideră $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ astfel încât $\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$. Să se determine $\sin x,\ \cos x,\ tg\ x,\ ctg\ x$.
10. Știind că $\sin x + \cos x = -\frac{1}{5}$ și că $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, calculați valoarea expresiei
    $E(x) = \sin x - \cos x$.

VI.2.Funcțiile trigonometrice ale unei sume și ale unei diferențe de unghiuri

Breviar teoretic

- Pentru orice numere reale x, y au loc relațiile:

a) $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x$

b) $\sin(x-y) = \sin x\cos y - \sin y\cos x$

c) $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

d) $\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$

e) $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ f) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

g) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ h) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$.

Probleme propuse

1. Calculati: $\sin 150^\circ, \sin\frac{7\pi}{6}, \sin\frac{5\pi}{4}, \sin\frac{5\pi}{3}, \sin\frac{22\pi}{3}$,

$\cos 135^\circ, \cos\frac{7\pi}{6}, \cos\frac{5\pi}{4}, \cos\frac{5\pi}{3}, \cos\frac{22\pi}{3}$

2. Daca $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), y \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\sin x = \frac{3}{5}$, $\cos y = -0{,}8$, calculati $\sin(x-y), \sin(x+y), \cos(x-y), \cos(x+y), \sin 2x, \cos 2x$.

3. Aduceti la o forma mai simpla:

a) $\sin(x-30^\circ) + \sin(x+30^\circ)$

b) $\cos(2x-120^\circ) + \cos(2x+120^\circ)$

4. Sa se gaseasca formule de calcul prescurtat pentru: $\sin 3x, \cos 3x$.

5. Calculați a) $\sin\frac{5\pi}{7}\cos\frac{13\pi}{28} - \cos\frac{5\pi}{7}\sin\frac{13\pi}{28} =$

b) $\cos\frac{13\pi}{21}\cos\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{13\pi}{21}\sin\frac{2\pi}{7} =$

6. Să se calculeze $\sin^2 80^0 + \sin^2 10^0$.

7. Să se calculeze $tg^2 30^0 + ctg^2 45^0$.

8.Să se calculeze $\cos 10^0 + \cos 20^0 + \cos 160^0 + \cos 170^0$.

9.Să se calculeze cos x, ştiind că $\sin x = \frac{3}{5}$ şi $x \in (0^0;90^0)$.

VI.3. Transformarea sumelor în produs și a produselor în sume

Breviar teoretic

- Formule de transformare a produselor de funcții trigonometrice în sume de funcții trigonometrice:

  a) $sin\ x \cdot \cos y = \frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2}$

  b) $\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$

  c) $\sin x \cdot \sin y = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$.

- Formule pentru transformarea sumelor de funcții trigonometrice în produse:

  a) $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

  b) $\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

  c) $\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

  d) $\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$.

Probleme propuse

1. Transformați în produs:

   a) $\sin 50° + \sin 20°$, $\sin 50° - \sin 20°$

   b) $\cos 50° + \cos 20°$, $\cos 50° - \cos 20°$

   c) $tg\ 20° + tg\ 40°$, $tg\ 65° - tg\ 5°$

   d) $ctg\ 40° + ctg\ 5°$, $ctg\ 52° - ctg\ 7°$

   e) $\sin\frac{\pi}{5} + \sin\frac{2\pi}{15}$, $\sin\frac{\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{15}$

   f) $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{15}$, $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{15}$

   g) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{12}$, $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{12} - \mathrm{tg}\frac{\pi}{6}$

   h) $\mathrm{ctg}\frac{3\pi}{28} + \mathrm{ctg}\frac{\pi}{7}$, $\mathrm{ctg}\frac{4\pi}{9} - \mathrm{ctg}\frac{\pi}{9}$.

2. Transformați în produs :

a) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x$
b) $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x$.

3. Transformați în sume produsele:
   a) $\sin 10° \sin 20°$, $\cos 160° \cos 40°$, $\sin 70° cos 110°$
   b) $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}$, $\sin \frac{7\pi}{12} \sin \frac{2\pi}{9}$.

VI.4.Produsul scalar a doi vectori

Breviar teoretic

- Fie $\vec{u}$ *și* $\vec{v}$ doi vectori. Produsul scalar al vectorilor $\vec{u}$ *și* $\vec{v}$ este numărul real notat $\vec{u} \cdot \vec{v}$, definit prin : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}), dacă\ \vec{u} \neq \vec{0}\ și\ \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0, \quad dacă\ \ \vec{u} = \vec{0}\ și\ \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$.

  $a)\ \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

  $b)\vec{u}$ *și* $\vec{v}$ sunt ortogonali dacă $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Fie $\vec{u}$ *și* $\vec{v}$ doi vectori într-un reper cartezian $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, astfel încât $\vec{u} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath}$,

$\vec{v} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath}$. Atunci avem relațiile:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$ și $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$.

b) $|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ – norma vectorului.

Probleme propuse

1. Calculați produsul scalar al vectorilor $\vec{u}$ *și* $\vec{v}$, în următorele cazuri:
   a) $|\vec{u}| = 2, |\vec{v}| = 3\ și\ m(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 60°$

b) $|\vec{u}| = 3, |\vec{v}| = 4$ *și* $m(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 30°$

c) $|\vec{u}| = |\vec{v}| =$ *și* $m(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 120°$.

2. Să se determine produsul scalar al vectorilor:
   a) $\vec{a}(3,2), \vec{b}(2,-3)$
   b) $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j}$ $,\vec{b}(6,-2)$
   c) $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ $,\vec{b} = 2\vec{i} - 6\vec{j}$.

3. Să se determine unghiul vectorilor:
   a) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ $,\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$
   b) $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ $,\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$
   c) $\vec{a} = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$ $,\vec{b} = \vec{i}$
   d) $\vec{a} = 2\sqrt{3}\vec{i} + 2\vec{j}$ $,\vec{b} = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$.

4. Să se determine $m \in R$ pentru care vectorii $\vec{a}$ *și* $\vec{b}$ sunt vectori ortogonali:

a) $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j}$ $,\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$

b) $\vec{a} = (2m+1)\vec{i} + m\vec{j}$ $,\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$

c) $\vec{a}\,(m+1, m-1)$ $,\vec{b}(3m-1, -15)$.

VI.5. Rezolvarea triunghiurilor

Breviar teoretic

Fie $\Delta\ ABC$ cu laturile $a = BC, b = AC, c = AB$.

- Teorema cosinusului. În orice $\Delta\ ABC$, au loc relațiile:
  a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
  b) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos \mathrm{B}$
  c) $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,\mathrm{ab}\cos C$.
- Teorema sinusurilor. În orice $\Delta\ ABC$, au loc relația:
  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, unde R este raza cercului circumscris $\Delta\ ABC$.
- Formule pentru aria $\Delta\ ABC$:

a) $A_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$;

b) $A_{\Delta ABC} = \frac{b \cdot c \sin A}{2} = \frac{a \cdot c \sin B}{2} = \frac{b \cdot a \sin C}{2}$;

c) $A_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, unde $p = \frac{a+b+c}{2}$;

d) $A_{\Delta ABC} = \frac{abc}{R}$;

e) $A_{\Delta ABC} = p \cdot r$, r raza cercului înscris într-un triunghi.

Probleme propuse

1. Calculați raza cercului circumscris $\Delta\ ABC$, știind că $BC = 4 \text{ și } A = 30°$.
2. În $\Delta ABC, BC = 4, AC = 5, AB = 5\sqrt{3}$. Calculați $cosA$.
3. În triunghiul dreptunghic ABC avem $A = 90°$, $\cos B = \frac{3}{5}$. calculați $\sin C$.
4. Calculați $\cos A$, $\text{în } \Delta ABC$, știind că $AB = 2, BC = 3, AC = 4.$
5. Aflați lungimea laturii $BC\ a\ \Delta ABC$, știind că $\sin A = \frac{1}{2}, R = 4.$
6. Calculați $sin^2 25 + sin^2 65.$
7. Determinați lungimea $BC \text{ în } \Delta ABC$ știind că $AC = 6, AB = 4, \text{și } A = 60°$.
8. Aflați unghiul A a ΔABC , știind că $BC = 6, R = 2\sqrt{3} \text{ și } \Delta$ este ascuțitunghic.
9. Aflați catetele $AB, AC, ale\ \Delta ABC$ dreptunghic , știind că $\sin B = \frac{3}{5} \text{ și } BC = 15$.
10. Aflați aria ΔABC , știind că $AB = AC = 4, \text{și } A = 60°$.
11. Să se determine raza cercului circumscris și raza cercului înscris triunghiului ABC cu laturile $6, 8, \text{și } 10.$
12. Fie un triunghi ABC , știind că $m(\sphericalangle A) = 45°, AB = \sqrt{2}\ cm, BC = 3cm$. Calculați lungimea laturii $AC.$

Bibliografie

1. Marius Burtea, Georgeta Burtea, *Matematică. Trunchi comun și curriculum diferențiat*, clasa a IX-a. Editura Carminis, Pitești 2004.
2. C. Năstăsescu, I. Chițescu, *Matematică. Trunchi comun și curriculum diferențiat*, clasa a IX-a. Editura Didactică și Pedagogică, București 2010
3. Cătălin Petru Nicolescu , *Matematică- sinteze de teorie exerciții și probleme*, Editura și Tipografia Icar, București , 2009
4. Cătălin Petru Nicolescu , *Geometrie și trigonometrie*, Editura și Tipografia Icar, București , 2009
5. Marius Perianu, Dinu Șerbănescu, *Matematică pentru Bacalaureat M2*, Editura Art Educațional , București ,2019
6. Mariana Draga Tătucu, Emilia Răducan, *Simulare clasa a XI-a- pregătire pentru Bacalaureat-Matemetică*, Editura Delfin, București, 2020
7. www.didactic.ro
8. www.subiecte.edu.ro

CLASA a XI-a

Notă de prezentare

Studiul matematicii în liceului urmărește: să contribuie la formarea și dezvoltarea capacității elevilor de a reflecta asupra lumii și oferă individului cunoștințele necesare pentru a acționa asupra acesteia, în funcție de propriile nevoi și dorințe; să formuleze și să rezolve probleme pe baza relaționării cunoștințelor din diferite domenii; să înzestreze absolventul de liceu cu un set de competențe, valori și atitudini, pentru a favoriza o integrare profesională și optimă.

Materialul specific clasei a XI-a conține șapte capitole. Fiecare capitol este trecut prin două faze, faze care dau consistență ghidului:

- breviarul teoretic – rezumă principalele noțiuni teoretice care recomandă capitolul în discuție
- exerciții și probleme propuse- parte formată din seturi de probleme variate care să corespundă tratării cât mai complete a tematicii propuse.

Competențele specifice vizate la clasa a XI-a sunt:

1. Identificarea unor situații practice concrete, care necesită asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matriceală a unui proces specific domeniului economic sau tehnic
2. Asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matricială a unui proces
3. Aplicarea algoritmilor de calcul cu matrice în situații practice
4. Rezolvarea unor sisteme utilizând algoritmi specifici
5. Stabilirea unor condiții de existență și/sau compatibilitate a unor sisteme și identificarea unor metode adecvate de rezolvare a acestora
6. Optimizarea rezolvării unor probleme sau situații-problemă prin alegerea unor strategii și metode adecvate (de tip algebric, vectorial, analitic, sintetic)
7. Caracterizarea unor funcții utilizând reprezentarea geometrică a unor cazuri particulare
8. Interpretarea unor proprietăți ale funcții cu ajutorul reprezentărilor grafice
9. Aplicarea unor algoritmi specifici calculului diferențial în rezolvarea unor probleme

10. Exprimarea cu ajutorul noțiunilor de limită, continuitate, derivabilitate, monotonie, a unor proprietăți cantitative și calitative ale unei funcții
11. Utilizarea reprezentării grafice a unei funcții pentru verificarea unor rezultate și pentru identificarea unor proprietăți.

Clasa a XI-a - Conținuturi

1. Capitolul I. Matrice și operații cu matrice
2. Capitolul II. Determinanți
   II.1. Determinantul unei matrice pătratice
   II.2. Aplicații ale determinanților în geometria analitică
3. Capitolul III. Sisteme de ecuații liniare
4. Capitolul IV. Limite de funcții
   III.1. limita unei funcții într-un punct
   III.2. limite remarcabile. Cazuri de nedeterminare
   III.3. Asimptote la graficul unei funcții
5. Capitolul V. Funcții continue
6. Capitolul VI. Funcții derivabile
7. Capitolul VII. Recapitulare finală clasa a XI-a

Capitolul I. Matrice

I.1.Matrice și operații cu matrice

Breviar teoretic

- Se numește *matrice* de tipul (m, n) sau matrice cu m linii și n coloane cu elemnte din mulțimea C o funcție $A: \{1,2,\cdots,m\} \times \{1,2,\cdots,n\} \to C$, $A(i,j) = a_{ij} \in C$. Numerele $a_{ij} \in C$ se numesc elementele matricei.
- Mulțimea matricelor cu m linii și n coloane se notează $\mathcal{M}_{m,n}(C)$; $\mathcal{M}_n(C)$ mulțimea matricelor pătratice de ordinul n.
- Fie $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(C), A = (a_{ij})$ și $B = (b_{ij})$ .Suma lor este matricea $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$, iar produsul dintre scalarul $k \in C$ și matricea A este matricea $kA = (ka_{ij})$. Diferența matricelor A și B este $A - B = A + (-B)$.
- Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(C), B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{n,p}(C)$ .Produsul celor două matrice, notat AB este matricea $C = (c_{ik}) \in \mathcal{M}_{m,p}(C)$, cu $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$. (produsul a două matrice se face după regula linie înmulțită cu coloană).
- Puterile naturale ale unei matrice pătratice $A \in \mathcal{M}_n(C)$ se definesc inductiv punând:
  $A^1 = A,\ A^2 = A \cdot A,\ A^3 = A^2 \cdot A,\ \cdots, A^{n+1} = A^n \cdot A$.

Exerciții propuse

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Calculați $A + B; A - B; 2A + 3B; A \cdot B; A^2; B^2 - A$.
2. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

   Calculați $A + B; 2A + 3B; A \cdot B; A^2; B^2 - A$.

3. Fie $A = (1 \quad 2 \quad 3) \in \mathcal{M}_{1,3}(R)$ *și* $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(R)$. Calculați $A \cdot B$.

4. Fie matricile $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(R)$:

a) Calculați A^2, B^2;

b) Verificați că $A^2 + B^2 = 38I_2$

c) Verificați că $AB = I_2$.

5. Să se calculeze $f(A)$ știind că:

   a) $f(A) = 2A^2 - I_2,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

   b) $f(A) = A^2 - 2A + 3I_3,\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Fie matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2a & a \\ a & 2a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(R)$. Aflați matricea $A(1) + A(2)$.

7. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & x & x^2 \\ 0 & x^2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 9 \\ 0 & 9 & -1 \end{pmatrix}$.

   a) Să se determine x știind că matricea $A = B, x \in R$.

   b) Pentru $x = -3$, să se calculeze suma elementelor matricei $C \in \mathcal{M}_3(R)$, unde
   $C = A - B + I_3$.

8. Să se rezolve ecuaţia matriceală $2X + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

9. Să se rezolve ecuaţia matriceală $2X + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 9 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Să se determine $x, y \in R$ pentru care are loc : $\begin{pmatrix} x^2 & y^2 \\ 2x+1 & y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.

11. Să se rezolve ecuaţia matriceală $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
12. Determinați numerele reale x și y astfel încât să aibă loc egalitatea $\begin{pmatrix} x^2 - 3x + 4 & -1 \\ 2 & 2x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & -1 \\ 2 & -x + 5 \end{pmatrix}$
13. Să se determine matricea X din ecuația
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} + X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$
14. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine A^{10}.
15. Să se rezolve ecuaţia $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, X \in M_2(R)$.
16. Să se determine puterea n a matricii $A \in M_2(C)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, unde $n \in N^*$.
17. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n.

Capitolul II Determinanți

II.1. Determinantul unei matrice pătratice.

Breviar teoretic

- Fie matrice pătratică de ordinul doi $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Numărul $d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ se numește determinantul matricei A de ordinul doi.
- Fie matrice pătratică de ordinul trei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Numărul $d = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$ numește determinantul matricei A de ordinul trei.

Exerciții propuse

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(R)$.
   a) Calculați $det\ A, det\ B$
   b) Arătăți că numărul $d = \det(AB)$ este pătratul unui număr natural.
   c) Determinați numărul natural n, pentru care $det(B^n) = 256$.

2. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(R)$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(R)$. Calculați $det(AB)$.

3. Arătați că determinantul matricei $A = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -x & 1+x \end{pmatrix} \in M_2(R)$ nu depinde de x.

4. Se dau matricele $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \in M_2(R)$.
   a) Să de determine $a \in R$, astfel încât $\det A = 4$

b) Să se calculeze $\det(A+B)$

c) Pentru matricele A *și* B date, să se verifice egalitatea $\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B$.

5. Se consideră determinantul $D(x)=\begin{vmatrix}2 & x & -2\\ 4 & x-2 & -2\\ 1 & -1 & x\end{vmatrix}$, unde x este număr real.

a) Calculați $D(2)$.

b) Arătați că $D(x)=-2x(x+2)$

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $D(\log_2 x)=0$.

6. Se notează $D(m)$ determinantul matricei $A(m)=\begin{pmatrix}2 & m & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 3 & 0 & m+1\end{pmatrix}\in M_3(R)$.

a) Arătați că numărul $D(2)$ este întreg

b) Rezolvați ecuația $3+D(x)=0$

c) Determinați perechile (a,b) de numere întregi , pentru care $6+D(a)+D(b)=0$.

7. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}3a & a+1 & -2\\ 2a+3 & 2 & -3\\ 1 & a+1 & a-2\end{pmatrix}$.

a) Pentru $a=1$ calculați $detA$

b) Calculați $detA$.

8. Fie mulțimea matricelor pătratice de ordinul 2 de forma

$$A=\left\{X(a,b)=\begin{pmatrix}a & b\\ a+b & a-b\end{pmatrix}, a,b\in R\right\}$$

a) Calculați determinantul matricei $X(4,1)$

b) Demonstrați că pentru orice matrice $X, Y\in A, X+Y\in A$

c) Calculați determinantul matricei $X(5,0)\cdot X(-5,0)$.

9. Fie determinantul $D(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix}$

   a) Calculați D(4)
   b) Calculați D(x)

10. Rezolvați ecuațiile

   a) $\begin{vmatrix} 2x-2 & x \\ 6 & 1 \end{vmatrix}=0$

   b) $\begin{vmatrix} 2x^2 & x(x+2)-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$

   c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & x & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

11. Se consideră matrice de ordin 2 cu elemente reale $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculați A^2-3A.

b) Demonstrați că $\det(A^2-A)=0$.

c) Arătați că $A^{10}-3^9A=0_2$.

II.2. Aplicații ale determinanților în geometria analitică

Breviar teoretic

Fie A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C) trei puncte , $A\neq B\neq C\neq A$, în reperul cartezian XOY.

➢ Ecuația carteziană a dreptei AB se scrie sub formă de determinant:

AB: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix}=0.$

- Punctele A, B, C sunt coliniare dacă și numai dacă are loc egalitatea:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

- Distanța de la un punct P(x_P, y_P) la o dreaptă (d) de ecuație $ax + by + c = 0$ se calculează cu formula :

$$D(P,d) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}; d(P,h) \geq 0.$$

- Aria triunghiului ΔABC se calculează cu formula:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Exerciții propuse

1. Scrieți ecuația dreptei care trece prin punctele A și B sub formă de determinant, apoi determinați $d(O, AB), O(0,0)$:

   $a)\ A(-2,3), B(3,0);$ $b)\ A(1,5), B(-2,4);$

   $c)\ A(0,-3), B(-5,0);$ $d)\ A(\sqrt{2}, -\sqrt{3}), B(1,0).$

2. Verificați coliniaritatea punctelor:

   $a)\ A(-2,3), B(3,0), C\left(1, \frac{6}{5}\right);$ $b)\ A(1,-3), B(4,-1), C(2,-5)$

   $c)\ A(m; m-1), B(-2m; -2m-1), C(3m-1; 3m-2).$

3. Aflați $m \in R$ astfel încât punctele $E(-3,-2), F(4,1)$ și $G\left(m+1, \frac{3m-2}{7}\right)$ să fie coliniare.

4. Calculați aria ΔABC , ale cărui vârfuri sunt punctele $A(1,1),\ B(4,2),\ C(2,5).$

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1), B(m-1,2)$ *și* $C(3, m+1)$.
   a) Pentru $m = 1$, scrieți ecuația dreptei AB
   b) Determinați $m \in R$ astfel încât punctele A, B, C să fie coliniare
   c) Determinați $m \in R$ astfel încât aria triunghiului ABC să fie minimă.

6. Fie punctele $A(-4; -2), B(2; 2), C(3; 0)$.
   a) Reprezentați punctele în repreul cartezian XOY
   b) Scrieți ecuația dreptei AB
   c) Calculați aria triunghiului ABC.

7. Se consideră punctul $A(-2,4)$ și punctul $B(-1; 4)$. Să se determine patametrul real m astfel ca punctul $M(m, m+2)$ să fie coliniar cu A *și* B.

8. Se consideră punctele $A(1; m), B(-2, m)$ *și* $C(0; 6)$. Să se determine parametrul real m astfel ca aria triunghiului ABC să fie 8.

9. Se dau punctele $A(6,4), B(2,5), C(-4,3), D(-3,-3)$. Să se reprezinte punctele în plan și să se determine aria suprafeței triunghiulare (ABC) și aria suprafeței patrulatere $(ABCD)$.

10. Se dau punctele $A(-3,-2), B(5,-4), C(-1,-3)$.
    a) Să se scrie ecuațiile laturilor triunghiului ABC.
    b) Să se determine lungimile înălțimilor triunghiului ABC.

11. Se dau punctele $A(1,0), B(-2,4), C(-1,4), D(3,5)$.
    a) Să se reprezinte punctele în plan și să se scrie ecuațiile dreptelor AB, BC, CA, CD.

b) Să se determine distanțele de la vârfurile B și D la dreapta AC.

c) Să se compare ariior suprafețelor $(ABD), (BCD)\ și\ (COD)$.

d) Dacă punctul $M(m, m+2)$ este coliniar cu $B\ și\ C$ calculați aria suprafeței (MAD).

Capitolul III. Sisteme de ecuații liniare

Breviar teoretic

- Fie matricea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(C)$ și numerele $b_1, b_2, \cdots, b_m \in C$ date. Sistemul de ecuații de forma $(S) = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ se numește sistem de m ecuații liniare cu n necunoscute.
- Sitemul (S) se scrie sub forma matricială astfel: $AX = B$, ubde A este maticea asociată sistenului, X maticea coloană a necunoscutelor și B matricea coloană atermenilor liberi.
- Soluția sistemului (S) este un sistem ordonat de numere $(x_1^0, x_2^0, \cdots x_n^0)$ cu proprietatea că verifică ecuațiile sistemului.
- Sistemul (S) se numește compatibil dacă are cel puțin o soluție și incompatibil dacă nu are nici o soluție.
- Sistemul (S)se numește compatibil determinat dacă are o unică soluție și compatibil netederminat dacă are o infinitate de soluții.
- Sistenul (S) de tipul (m, n) se numește sistem Cramer dacă $m = n$ și $\det A \neq 0$. Soluția sa unică se poate afla cu ajutorul formulelor lui Cramer: $x_i = \frac{d_{x_i}}{d}$, $i = \overline{1, n}$, în care d este determinantul matricei sistemului, iar d_{x_i} , determinantul care se obține din d, înlocuind coloana i cu coloana termenilor liberi.

Exerciții propuse

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare: $\begin{cases} x + 5y = 6 \\ 2x + y = m \end{cases}$

a) Determinați $m \in R$, știind că sistemul admite soluția: $x = -4, y = 2$;
b) Pentru $m = 3$, să se rezolve sistemul.

2. Fie sistemul $\begin{cases} mx + y - 3z = m^2 - 3 \\ 5x - 2y + x = -2 \\ (m+1)x + 2y + 3z = 7 \end{cases}$, $m \in R$. Determinați $m \in R$, astfel încât sistemul să admită soluția $(1,2,1)$.

3. Fie sistemul $\begin{cases} x + 4y + 4z = 15 \\ 3x + (a+4)y + 5z = 22 \\ 3x + 2y + (3-a)z = 16 \end{cases}$, $a \in R$. Arătați că tripletul $(7,1,2)$ nu poate fi soluție a sistemului, oricare ar $a \in R$.

4. Scrieți matricea asociată sistemului, matricea termenilor liberi și matricea terminilor

necunoscuți și apoi rezolvați sistemul: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 = -2 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$.

5. Să se rezolve următoarele sisteme:

a) $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 6y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + 2z = -2 \\ 4y - 3z = -1 \\ 2x - z = -1 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 5y + z = -1 \\ x + y + 2z = 6 \\ 3x + 2y - z = 3 \end{cases}$

6. Fie A matricea coeficienților sistemului $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x - y + mz = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$, unde $m \in R$

a) Să se calculeze $\det A$.

b) Să se determine $m \in R$ astfel încât sistemul să admită soluții nenule.

c) Să se arate că, dacă m =0 , atunci expresia $\frac{z_0^2+y_0^2+x_0^2}{z_0^2-y_0^2-x_0^2}$ este constantă, pentru orice soluție nenulă (x_0, y_0, z_0) a sistemului.

7. Arătați că sistemul de ecuații $\begin{cases} x+2y=1 \\ 5x-y=6 \\ 3x-4y=0 \end{cases}$ este incompatibil.

8. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y+x=3 \\ ax+y-z=2 \\ 2ax-y+z=4 \end{cases}$.

a) să se scrie matricele asociate sistemului.

b) să se determine $a \in R$ știind că $\det A = -12$, unde A matricea asociată sistemului.

c) pentru $a = 2$ să se rezolve sistemul.

Capitolul IV. Limite de funcții

IV. 1. Limita unei funcții într-un punct

Breviar teoretic

- Fie $f: D \to R, x_0 \in R$ un punct de acumulare pentru D și $l \in \bar{R}$. Numărul l se numește limita funcției f în punctul x_0 dacă pentru orice vecinătate V a lui l, există o vecinătate U a lui x_0 cu proprietatea că pentru orice $x \in D \cap U, x \neq x_0$, avem $f(x) \in V$.
  Notăm: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.
- Limitele funcțiilor elementare
  1. Limita funcției constante , $f: R \to R, f(x) = c, c \in R\ cu\ x_0 \in \bar{R},\ \lim\limits_{x \to x_0} c = c.$
  2. Limita funcției de gradul I, $f: R \to R, f(x) = ax + b,\ a, b \in R\ , a \neq 0\ cu\ x_0 \in \bar{R},$
     $\lim\limits_{x \to x_0} (ax + b) = \begin{cases} ax_0 + b, & x_0 \in R \\ a(\pm\infty), & x_0 = \pm\infty \end{cases}$.
  3. Limita funcției de gradul al II-lea , $f: R \to R, f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in R$
     $a \neq 0\ cu\ x_0 \in \bar{R},\ \lim\limits_{x \to x_0} (ax^2 + bx + c) =$
     $\begin{cases} a{x_0}^2 + bx_0 + c, & x_0 \in R \\ a(\pm\infty), & x_0 = \pm\infty \end{cases}$
     .
  4. Limita funcției radical de ordinul 2, $f: [0, \infty) \to R, f(x) = \sqrt{x}\ și\ x_0 \in (0, \infty).$
     $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \begin{cases} \sqrt{x_0}\,, & x_0 \in [0, \infty) \\ +\infty & x_0 = +\infty \end{cases}$.
  5. Limita funcției radical de ordinul , $f: R \to R, f(x) = \sqrt[3]{x}\ și\ x_0 \in R.$
     $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[3]{x} = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x_0 \in [0, \infty) \\ \pm\infty & x_0 = \pm\infty \end{cases}.$

6. Limita funcției exponențiale, $f: R \to (0,\infty), f(x) = a^x, a \in (0,\infty) - \{1\}$ și $x_0 \in R$

$$\lim_{x \to x_0} a^x = \begin{cases} a^{x_0} & , x_0 \in R \\ 0, x_0 = +\infty, a < 1 \text{ sau } x_0 = -\infty, a > 1 \\ +\infty, x_0 = +\infty, a > 1 \text{ sau } x_0 = -\infty, a < 1 \end{cases}.$$

7. Limita funcției logaritmice, $f: (0,\infty) \to R, f(x) = \log_a x, a \in (0,\infty) - \{1\}$,

$$\lim_{x \to x_0} \log_a x = \begin{cases} \log_a x & , x_0 \in (0,\infty) \\ +\infty, x_0 = 0, a < 1 \text{ sau } x_0 = \infty, a > 1 \\ -\infty, x_0 = 0, a > 1 \text{ sau } x_0 = \infty, a < 1 \end{cases}.$$

<u>Exerciții propuse</u>

1. Să se calculeze limitele de funcții:

a) $\lim\limits_{x \to 2}(2x+5)$ b) $\lim\limits_{x \to -2}(-3x^2+5x+6)$

c) $\lim\limits_{x \to 3}(x^3-2x^2+6)$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty}(2020x^{2020}+x-2)$

e) $\lim\limits_{x \to \infty}(-2x^5+8x-2)$ f) $\lim\limits_{x \to 0}(5x^2+6x-7)$

2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x \to 0}\frac{x^2+6}{x+7}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty}\sqrt{x}$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty}\sqrt{x^2}$

d) $\lim\limits_{x \to -1}\sqrt[3]{x}$

e) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}}\frac{1}{(x+1)^2}$ f) $\lim\limits_{x \to 3}\left(\frac{2}{3}\right)^x$ g) $\lim\limits_{x \to -\infty}15^x$

h) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{14}{31}\right)^x$

i) $\lim\limits_{x \to -1}\frac{x+1}{x^2-1}$ j) $\lim\limits_{x \to 3}\log_{\frac{1}{3}} x$ k) $\lim\limits_{x \to 0}\log_{\frac{1}{5}} x$

l) $\lim\limits_{x \to e^2}\ln x$.

$x>0$

3. Să se cerceteze dacă următoarele funcții au limită în punctul specificat:

a) $f: R \to R, f(x) = \begin{cases} 3x+2, & x \le 0 \\ x^2+x+2, & x>0 \end{cases}$

b) $f: R \to R, f(x) = \begin{cases} e^{x+1}+1, & x \le 2 \\ \log_2(x+2)+x-1, & x>2 \end{cases}$.

c) $f: R \to R, f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in (-\infty, 0] \\ x, & x \in (0,2] \\ 18-x^4, & x \in (2,+\infty) \end{cases}$ $x_0 = 0, x_0 = 2$.

4. Să se determine parametrul real pentru care funcția are limită în punctul dat

a) $f: R \to R, f(x) = \begin{cases} 3x^2-mx+3, & x \le -1 \\ mx^2+2mx+7, & x>-1 \end{cases}$

b) $f: R \to R, f(x) = \begin{cases} m\ln(x+2), dacă\ x \ge 0 \\ 1+2x+3x^2, dacă\ x<0. \end{cases}$

5. Fie funcția $f: R \to R, f(x) = \begin{cases} e^x+x+a, & x \le 0 \\ x^2+b\ln x, & x>0 \end{cases}$.

a) să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$

b) să se determine a, b astfel încât funcția să aibă limită în $x_0 = 0$.

IV.2. Limite remarcabile. Cazuri de nedeterminare.

Breviar teoretic

- În mulțimea $\bar{R}$ următoarele operații nu au sens: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \cdot \infty$. Pentru eliminarea acestor cazuri de nedeterminare se folosesc anumite metode precum metoda factorului forțat, descompunerea în produs de factori, raționalizarea, formulele trigonometrice sau anumite limite remarcabile cum ar fi : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$; $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$; $\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg}\, x}{x}=1$; $\lim_{x\to 0}\frac{\text{arctg}\, x}{x}=1$; $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$; $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=lna$; $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=r, r\in R.$

Exerciții propuse

Calculați:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x-6}{5x-15}$; 2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-2}{x-1}$; 3. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$; 4. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2x-6}$; 5. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^3-125}{x-5}$.

6. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^3-27}$; 7. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x+3}-\sqrt{x+7}}{4x-8}$; 8. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$; 9. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{(x-1)(x+2)}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{|x|}$; 11. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{|x-1|^2}{x-1}$; 12. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$; 13. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}{x-1}$;

14. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$; 15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{4x^2}$; 16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2}$;

17. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{tgx-1}{\sin^2 x-\cos^2 x}$; 18. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}tgx-3}{3x-\pi}$; 19. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$; 20. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}$;

21. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(x^2+x-2)}{\sin(x^2+3x+2)}$; 22. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\ln(1+5x)}{5x^2}$; 23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x-x^2)}{x}$; 24. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x-1}-1}{\sqrt{x}-1}$;

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+6}{-5x^3+x}$; 26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^3+4x+1}{6x^3+x-4}$; 27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}}{5x-3}$; 28. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+3x}}{5x+1}$;

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+e^{2x})}{x}$; 30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\cdot\ln(\cos x)$; 31. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}(x-\dfrac{\pi}{3})\cdot tgx$; 32. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot tg\dfrac{\pi x}{2}$;

IV.3. Asimptote la graficul unei funcții

Breviar teoretic

Fie $D\subset R,\ f:D\to R,\ a\in D'$.

- Funcția $f:D\to R$ are dreapta y = b asimptotă orizontală la $-\infty$ dacă $D\supset(-\infty,b), b\in R$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b,$ respectiv, funcția $f:D\to R$ are dreapta y = a asimptotă orizontală la $+\infty$ dacă $D\supset(a,\infty), a\in R$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a.$
- Funcția $f:D\to R$ are dreapta x = a asimptotă verticală dacă cel puțin una dintre limitele $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}f(x)$ și $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}f(x)$ există și este infinită
- Dreapta y = mx + n este asimptotă oblică la ramura spre $-\infty$ a funcției $f:D\to R, D\supset(-\infty,b), b\in R,$ dacă $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-mx-n]=0,$ respectiv, dreapta y = m'x + n' este asimptotă oblică la ramura spre $+\infty$ a

funcției $f: D \to R, D \supset (a,+\infty), a \in R,$ dacă $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - m'x - n'] = 0,$

unde:

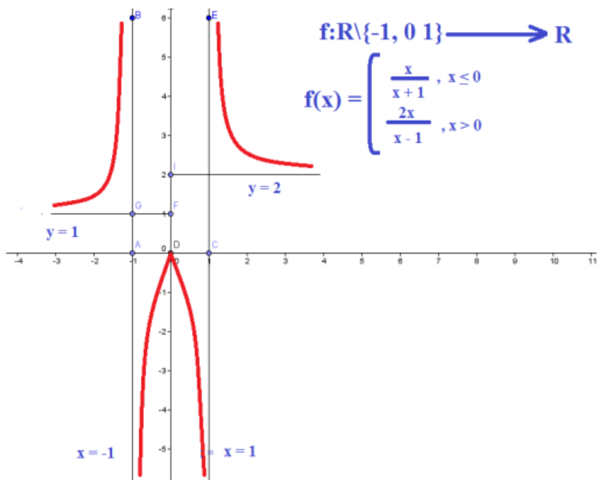
$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}, n = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - mx], iar$$

$$m' = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, n' = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - m'x].$$

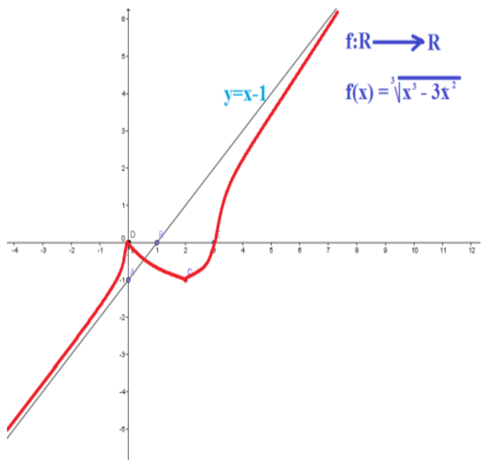
Observație: O funcție nu poate avea simultan asimptote orizontale și asimptote oblice spre $-\infty$, sau spre $+\infty$.

Exerciții propuse

1. Stabiliți tipurile de asimptote ale graficelor funcțiilor reprezentate în figurile de mai jos:



a) b)



2. Determinați asimptotele funcțiilor $f : D \to R,$ D fiind domeniul maxim de definiție:

$a)\ f(x)=\dfrac{5x^2}{x^2-25};$ $b)\ f(x)=\dfrac{3x^2-2x+1}{x};$

$c)\ f(x)=2x-\sqrt{4x^2-3x};$ $d)\ f(x)=xe^x;$

$e)\ f(x)=\dfrac{|\ln x|}{x}$ f) $f(x)=x-5$

g) $f(x)=x+1+\frac{1}{x-1}$ h) $f(x)=2x^2+3x+1$

i) $f(x)=\frac{1}{x}$ j) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

k) $f(x) = \ln(1-x)$ l) $f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$.

3. Fie $f: R - \{a\} \to R, f(x) = \frac{x^2+3x+a}{x-a}$.
   a) Aflați $a \in R$, astfel încât dreapta de ecuație $y = x + 1$ să fie asimptotă oblică a lui f.
   b) Pentru $a = -2$, aflați asimptotă verticală a funcției.

4. Fie $f: D \to R, f(x) = \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2-4x+m}$.
   a) Aflați $m \in R$, dacă $x = 3$ este asimptotă verticală a funcției.
   b) Pentru $m = 3$, determinați D și asimptotele funcției.

5. Fie $f: D \to R, f(x) = \frac{3}{-x^2-4x+m}$. Determinați $m \in R$ astfel încât graficul funcției:
   a) Să admită o singură asimptotă
   b) Să admită două asimptote verticale
   c) Să admită dreapta $x = 1$ ca asimptotă verticală.

Capitolul V. Funcții continue

Breviar teoretic

- Fie $f: D \to R$ o funcție de variabilă reală și $x_0 \in D$ un punct de acumulare pentru D. Funcția f este funcție continuă în punctul $x_0 \in D$ dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

  Funcția f continuă în $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$.
- Funcția f se numește discontinuă în punctul $x_0 \in D$, dacă nu este continuă în x_0.
- Punctul de discontinuitate $x_0 \in D$ este de speța I, dacă limitele laterale ale funcției în x_0 există și sunt finite.
- Punctul de discontinuitate $x_0 \in D$ este de speța a II-a, dacă cel puțin o limită laterală a funcției în x_0 nu există sau este infinită.
- Funcția $f: I \to R$ are proprietatea lui Darboux pe intervalul I, dacă $\forall\ a, b \in I, a < b$ și $\forall\ \lambda$ cuprins între valorile $f(a)$ *și* $f(b)$, există un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = \lambda$.

Obs. Orice funcție continuă pe acel interval are proprietatea lui Darboux pe acel interval.

- Consecințe ale proprietății lui Darboux:

  Consecința1. Fie $f: [a, b] \to R$, o funcție continuă pe $[a, b]$. Dacă $f(a) \cdot f(b) < 0$, atunci există un $c \in (a, b)$, astfel încât $f(c) = 0$.

  Consecința 2. Fie $f: I \to R$ o funcție continuă pe I. Dacă f nu se anulează pe intervalul I atunci funcția f are același semn pe I.

Exerciții propuse

1. Studiați continuitatea funcțiilor $f: R \to R$ în punctele indicate:

a) $f(x) = \begin{cases} x^3, x \le 3 \\ 3x^2, x > 3 \end{cases}, a = 3$

b) $f(x)=\begin{cases} x^2-3x, x\le 1 \\ 3x+1, x>1 \end{cases}, a=1$

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-16}{x-4}, x\ne 4 \\ 8, x=4 \end{cases}, a=4$

2.Să se determine parametrii reali astfel încât $f:R\to R$ să fie continua în punctul indicat:

a) $f(x)=\begin{cases} 3x+\alpha-1, x\le 2 \\ x^2+\alpha x-2, x>2 \end{cases}, a=2$

b) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{\alpha^2 x+1}, x\ge 1 \\ 2\alpha x+3, x<1 \end{cases}, a=1$

3.Stabiliti natura punctului de discontinuitate pentru $f:R\to R$:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+5, x>1 \\ 3, x\le 1 \end{cases}, a=1$

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, x>0 \\ 2x, x\le 0 \end{cases}, a=0$

4. Să se arate că ecuațiile următoare au soluții pe intervalele specificate:

$a)$ $\ln\, x+x=0$ pe $\left(\frac{1}{e},1\right)$

$b)$ $2cos^2x-1=0$ pe $(0,\pi)$.

5.Să se rezolve inecuațiile:

$a)$ $(x^2+x+2)(\ln x-1)>0$

$b)$ $(x^2-1)(e^{\cos x})<0$.

6.Arătați că următoarele ecuații au cel puțin o soluție în intervalul menționat.

a) $x^3+3x-1=0$ în $[0,1)$

b) $2x+\ln x^2=0$ în $\left(\frac{1}{e},1\right)$

c) $e^{2x}+2x=0$ în $[-1,1]$.

7. Să se studieze semnul funcțiilor:

a) $f: R \to R, f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

b) $f: (-\infty, 0) \to R, f(x) = (x+5)\lg(-2x)$

c) $f: R \to R, f(x) = (x-3)(e^x - 1)$.

8. Să se determine parametrul real a pentru care funcția $f: R \to R, f(x) = \begin{cases} ax + b, x \leq 4 \\ ax^2 + 5, \ x > 4 \end{cases}$ este continuă pe R și în plus există $\lim\limits_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$.

9. Să se determine constantele a, b pentru care funcția $f: R \to R, f(x) = \begin{cases} ax + b, x > 2 \\ x^2 + a, \ x \leq 2 \end{cases}$ este continuă pe R și în plus există $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

Capitolul VI. Funcții derivabile

Breviar teoretic

- Fie $f: D \subset R \to R$ și x_0 punct de acumulare din D. Funcția f este derivabilă în x_0 dacă există și este finită $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.
- Funcția $f: D \subset R \to R$ și x_0 punct de acumulare din D, este derivabilă în x_0 $\Leftrightarrow f$ este derivabilă la stânga și la dreapta în x_0 și $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$.
- Orice funcție derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.
- Dacă f este derivabilă x_0, graficul funcției admite tangentă în punctul $P(x_0, f(x_0))$ de ecuație $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
- Reguli de derivare:
  a) $(f \pm g)' = f' \pm g'$
  b) $(\alpha f)' = \alpha f'$
  c) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
  d) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$, $g \neq 0$.

Exerciții propuse

1. Să se calculeze derivata următoarelor funcții $f: D \to R$ (indicând domeniul maxim de definiție D pentru funcție)

a) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$
b) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 6x + 5$
c) $f(x) = 5x^4 + 3x - \frac{1}{x}$
d) $f(x) = 3sinx - 4cosx$
e) $f(x) = xlnx - 3x$
f) $f(x) = 3x + ln3 + xln3$

g) $f(x) = x^2 \cdot 3^x + 4x^3 + 2x$

h) $f(x) = (x^3 + 2x) \cdot lnx$

i) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

j) $f(x) = \frac{1}{x^2+3x-4}$

k) $f(x) = \frac{sinx+2}{cosx-3}$

l) $f(x) = \frac{x^2}{x+3} - \frac{6}{x+1}$

m) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}$

n) $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} - \sqrt[5]{x}$

o) $f(x) = x^{50} - \frac{50}{x^{50}} + 3$

p) $f(x) = \frac{1}{x^{2020}+3}$

q) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} + \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$

2.

Să se calculeze următoarele limite, utilizând regulile lui l'Hôspital:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}$; 2. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$; 3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3-3x+1}{x^3-6x+5}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$; 7. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2+x-6}$; 8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x-\ln\cos x}{x^2}$; 10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$; 11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$; 12. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\ln x}{x-\ln x}$;

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(\ln x)}{x}$; 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+e^{2x}}{e^{2x}-e^x}$; 15. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\ln(3x-2)}{\ln(2x-1)}$; 16. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}$;

17. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln\sin x}{\ln\sin 2x}$; 18. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$; 19. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{2x}}$; 20. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-5x^2+6}{x^4+x^2+3x+2}$;

21. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x}$; 22. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 3x}{\sin 2x+\sin 4x}$; 23. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n}$; 24. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{3^x+5^x-2}$;

25. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1-3^{x+1}}{3x^2+5x+2}$; 26. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^4}$

3. Se consideră funcția $: R\to R, f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{x^2+x+1}$.

a) să se calculeze $f'(x)$

b) să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

c) să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}$.

4. Se consideră funcția $f: R\to R, f(x)=\begin{cases} x+3, & x\le 1\\ \ln x+4, & x>1\end{cases}$.

a) să se studieze continuitatea funcției f pe R.

b) să se calculeze $f'(x)$

c) să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(-2,1)$.

5. Fie $f:(0,\infty)\to R, f(x)=x+\ln x$. Aflați coordonatele punctului care aparține graficului funcției , în care tangenta la grafic are panta egală cu $\frac{5}{4}$.

Proprietățile derivatei de ordinul I

Breviar teoretic

- Fie $f: I \to R$ o funcție derivabilă pe I. Atunci
  a) Dacă $f'(x) \geq 0, \forall\, x \in I$, atunci f este crescătoare pe I.
  b) Dacă $f'(x) \leq 0, \forall\, x \in I$, atunci f este descrescătoare pe I.
- Pentru determinarea intervalelor de monotonie , ale unei funcții derivabile $f: I \to R$ șe procedează astfel:
  a) Se determină derivata funcției , $f'(x)$
  b) Se rezolvă în R ecuația $f'(x)=0$ (și se determină punctele critice)
  c) Se stabilește semnul $f'(x)\ pe\ I$
  d) Se precizează variația funcției $f(x)$ pe I.

Exerciții propuse

1.Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{lnx}{\sqrt{x}}$. Să se determine intervalele de monotonie ale lui f.

2.Fie funcția f:$\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2}{x+1}$.

a) Determinați intervalele de monotonie ale funcției.

b) Să se demonstreze că $f(x)\leq -4, pentru \forall x \in (-\infty,-1)$

3. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x-2lnx$. Să se demonstreze că

$$f(x)\geq \frac{lne^2}{4}, \forall x \in (0,\infty).$$

4. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{e^x}{x+1}$

a)Studiați monotonia funcției

b)Să se demonstreze că $f(x)\geq 1, \forall x \in (-1,\infty)$

5. Fie funcția $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+x+2}{x-1}$. Studiați monotonia funcției și determinați punctele de extrem.

6. Se consideră funcția f: $(0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{lnx}{x}$, arătați că $x^e \leq e^x, \forall x \in (0,\infty)$

7. Fie funcția $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

a) Să se arate că f este descrescătoare pe$(0,2]$.

b) Să se demonstreze că $2e^{\sqrt{3}} < 3e^{\sqrt{2}}$

8. Se consideră funcția $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^4}{4} - lnx$

a) Să se studieze monotonia funcției și să se determine punctele de extrem.

b) Să se arate că $ln\sqrt{x} \leq \frac{x^2-1}{4}, \forall x \in (0,\infty)$

Capitolul VII. Recapitulare finală clasa a XI-a

1.

a) Arătați că $\det(A(10))=10$.

b) Demonstrați că $(A(a)-A(b))(A(a)-A(b))=3(a-b)(A(a)-A(b))$, pentru orice numere reale a și b.

c) Determinați numărul natural n pentru care $\det(A(2))+\det(A(3))+\ldots+\det(A(n))=35$.

Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a+1 & 2a+1 \\ a & 2a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

2.

Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ x-2y+z=2 \\ ax+y+z=3 \end{cases}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(1))=-9$.

b) Demonstrați că suma elementelor matricei $B(a)=A(a)\cdot A(a)$ **nu** depinde de numărul real a.

c) Pentru $a=-2$, arătați că sistemul de ecuații este incompatibil.

3.

. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & \ln a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a\in(0,+\infty)$.

a) Arătați că $\det(A(a))=1$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.

b) Demonstrați că $A(a)\cdot A(b)=A(ab)$, pentru orice $a,b\in(0,+\infty)$.

c) Determinați $a\in(0,+\infty)$, astfel încât $A(a)\cdot A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 2020 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.

Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

a) Arătaţi că $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$, $x \in (1,+\infty)$.

b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 2$, situat pe graficul funcţiei f.

c) Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie a celor două asimptote ale graficului funcţiei f.

5.

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3+3}{x^6+7}$.

a) Arătaţi că $f'(x) = \frac{-3x^2(x^3-1)(x^3+7)}{(x^6+7)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Determinaţi asimptotele graficului funcţiei f.

c) Demonstraţi că $|f(x) - f(y)| \le \frac{4}{7}$, pentru orice numere reale x şi y.

6.

Se consideră funcţia $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\ln x + a(x+1)$, unde a este număr real.

a) Arătaţi că $f'(x) = \ln x + 1 + a$, $x \in (0,+\infty)$, pentru orice număr real a.

b) Pentru $a = 1$, determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.

c) Demonstraţi că, pentru orice număr real a, funcţia f este convexă.

7.

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{e^x}$.

a) Arătaţi că $e^x(f(x) + f'(x)) = 1$, pentru orice număr real x.

b) Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Demonstraţi că dreapta de ecuaţie $y = x$ este tangentă la graficul funcţiei f.

Bibliografie

1. Marius Burtea, Georgeta Burtea, *Matematică. Manual pentru clasa a XI-a.* Editura Prior&Books Educațional, București 2011
2. I. Necșuleu, Mihai Postolache *Matematică. Manual pentru clasa a XI-a*. Editura Fair Parteners București 2006
3. Cătălin Petru Nicolescu , *Matematică- sinteze de teorie exerciții și probleme*, Editura și Tipografia Icar, București , 2009
4. Marius Perianu, Dinu Șerbănescu, *Matematică pentru Bacalaureat M2*, Editura Art Educațional , București ,2019
5. Mariana Draga Tătucu, Emilia Răducan, *Simulare clasa a XI-a- pregătire pentru Bacalaureat-Matemetică*, Editura Delfin, București, 2020
6. www.didactic.ro
7. www.subiecte.edu.ro

GHID DE PREGĂTIRE A EXAMENULUI DE BACALAUREAT LA DISCIPLINA MATEMATICĂ

CLASA a X-a

Notă de prezentare

Proiectul ROSE face parte din Programul Național al Ministerului Educației „Sprijin la bacalaureat, acces la facultate” și contribuie la strategia Ministerului de reducere a părăsirii timpurii a școlii în învățământul primar și secundar, la creșterea participării la activități de învățare pe tot parcursul vieții și la îmbunătățirea oportunităților în învățământul terțiar pentru populația României.

Activităţile derulate în liceul nostru în cadrul proiectului ROSE la matematică au avut ca obiective creşterea procentului de promovabilitate la examenul naţional de bacalaureat şi obţinerea de către candidaţi a unor medii mai mari decât în anii şcolari anteriori derulării proiectului. În acest sens s-au derulat **activități de consolidare și însușire a tehnicilor de învățare la matematică pentru examenul de bacalaureat** - activități remediale, de aprofundare a noțiunilor prezentate în orele de curs și creștere a nivelului de performanță școlară, în cadrul cărora elevii, sub îndrumarea mea, şi-au consolidat achizițiile dobândite la orele de curs și au deprins tehnici eficiente de rezolvare a subiectelor specifice examenului de bacalaureat la matematică. Prin acest proiect am oferit elevilor noștri o oportunitate de dezvoltare a competențelor necesare promovării examenului de bacalaureat, precum și pentru dezvoltarea lor personală și profesională, în vederea accederii la învățământul terțiar și de aceea i-am încurajat constant să se implice efectiv în activitățile derulate.

Înaintea începerii activităţilor directe cu elevii am realizat o analiză de nevoi care a scos în evidenţă noţiunile asupra cărora trebuie insistat mai mult şi a condus spre un anumit tip de exerciţii propuse, corelate cu particularităţile elevilor şi cu specificul probei de matematică din cadrul examenului naţional de bacalaureat. Auxiliarul curricular ajută elevii la sistematizarea noţiunilor teoretice şi la aplicarea acestora în contextul concret al probei de examen. Exerciţiile propuse au grad de dificultate progresiv, urmărind îndeplinirea cerinţelor derivate din competenţele specifice de evaluat la examenul naţional de bacalaureat, conform programei de examen în vigoare.

Prezenta lucrare reprezintă rezultatul activităţii directe derulate pe durata celor 4 ani de proiect, precum şi rezultatul experienţei personale dobândite atât ca profesor la clasele de liceu, specializarea ştiinţe ale naturii cât şi în calitate de profesor evaluator la examenul naţional de bacalaureat, în perioada 1990 - 2021. În elaborarea lucrării mi-au fost de un real folos competenţele dobâdite în cadrul cursurilor de formare vizând dezvoltarea competenţelor de evaluare (De.Ce.E.), precum şi în cadrul Programului de formare continuă în vederea constituirii Corpului de profesori evaluatori pentru examenele și concursurile naționale (CPEECN). Observaţiile formulate de elevi pe durata desfăşurării orelor, precum şi discuţiile cu colegii de catedră şi activităţile organizate în cadrul cercului pedagogic, au contribuit semnificativ la elaborarea unui auxiliar de calitate, care va ajuta generaţiile următoare să obţină rezultatele aşteptate la proba de matematică din cadrul examenului naţional de bacalaureat.

Competenţe specifice de evaluat la examenul naţional de bacalaureat

Clasa a X-a real, ştiinţe ale naturii

1. Identificarea caracteristicilor tipurilor de numere utilizate în algebră şi a formei de scriere a unui număr real în contexte specifice;
2. Determinarea echivalenţei între forme diferite de scriere a unui număr, compararea şi ordonarea numerelor reale;
3. Aplicarea unor algoritmi specifici calculului cu numere reale sau complexe pentru optimizarea unor calcule şi în rezolvarea de ecuaţii;
4. Alegerea formei de reprezentare a unui număr real sau complex în funcţie de contexte în vederea optimizării calculelor;
5. Alegerea strategiilor de rezolvare în vederea optimizării calculelor;
6. Determinarea unor analogii între proprietăţile operaţiilor cu numere reale sau complexe scrise în forme variate şi utilizarea acestora în rezolvarea unor ecuaţii;
7. Trasarea prin puncte a graficelor unor funcţii;

8. Prelucrarea informaţiilor ilustrate prin graficul unei funcţii în scopul deducerii unor proprietăţi algebrice ale acesteia (monotonie, semn, bijectivitate, inversabilitate, convexitate);
9. Utilizarea de proprietăţi ale funcţiilor în trasarea graficelor şi rezolvarea de ecuaţii;
10. Exprimarea în limbaj matematic a unor situaţii concrete şi reprezentarea prin grafice a unor funcţii care descriu situaţii practice;
11. Interpretarea, pe baza lecturii grafice, a proprietăţilor algebrice ale funcţiilor;
12. Utilizarea echivalenţei dintre bijectivitate şi inversabilitate în trasarea unor grafice şi în rezolvarea unor ecuaţii algebrice şi trigonometrice;
13. Diferenţierea problemelor în funcţie de numărul de soluţii admise;
14. Identificarea tipului de formulă de numărare adecvată unei situaţii-problemă date;
15. Utilizarea unor formule combinatoriale în raţionamente de tip inductiv;
16. Exprimarea, în moduri diferite, a caracteristicilor unor probleme în scopul simplificării modului de numărare;
17. Interpretarea unor situaţii-problemă având conţinut practic cu ajutorul funcţiilor şi a elementelor de combinatorică;
18. Alegerea strategiilor de rezolvare a unor situaţii practice în scopul optimizării rezultatelor;
19. Recunoaşterea unor date de tip probabilistic sau statistic în situaţii concrete;
20. Interpretarea primară a datelor statistice sau probabilistice cu ajutorul calculului financiar, al graficelor şi al diagramelor;
21. Utilizarea unor algoritmi specifici calculului financiar, statisticii sau probabilităţilor pentru analiza de caz;
22. Transpunerea în limbaj matematic prin mijloace statistice sau probabilistice a unor probleme practice;

23. Analizarea şi interpretarea unor situaţii practice cu ajutorul conceptelor statistice sau probabilistice;
24. Corelarea datelor statistice sau probabilistice în scopul predicţiei comportării unui sistem prin analogie cu modul de comportare în situaţii studiate;
25. Descrierea unor configuraţii geometrice analitic sau utilizând vectori;
26. Descrierea analitică, sintetică sau vectorială a relaţiilor de paralelism şi de perpendicularitate;
27. Utilizarea informaţiilor oferite de o configuraţie geometrică pentru deducerea unor proprietăţi ale acesteia şi calcularea unor distanţe şi a unor arii;
28. Exprimarea analitică, sintetică sau vectorială a caracteristicilor matematice ale unei configuraţii geometrice;
29. Interpretarea perpendicularităţii în relaţie cu paralelismul şi minimul distanţei;
30. Modelarea unor configuraţii geometrice analitic, sintetic sau vectorial.

Competenţe specifice de evaluat la examenul naţional de bacalaureat
Clasa a XII-a real, ştiinţe ale naturii

1. Identificarea unei structuri algebrice prin verificarea proprietăţilor acesteia;
2. Determinarea şi verificarea proprietăţilor unei structuri;
3. Verificarea faptului că o funcţie dată este morfism sau izomorfism;
4. Explicarea modului în care sunt utilizate, în calcule specifice, proprietăţile operaţiilor unei structuri algebrice;
5. Utilizarea structurilor algebrice în rezolvarea de probleme practice;
6. Exprimarea unor probleme practice, folosind structuri algebrice;

7. Identificarea legăturilor dintre o funcţie continuă şi derivata sau primitiva acesteia;
8. Stabilirea unor proprietăţi ale calculului integral, prin analogie cu proprietăţi ale calculului diferenţial;
9. Utilizarea algoritmilor pentru calcularea unor integrale definite;
10. Explicarea opţiunilor de calcul al integralelor definite, în scopul optimizării soluţiilor;
11. Folosirea proprietăţilor unei funcţii continue pentru calcularea integralei acesteia pe un interval [a, b];
12. Aplicarea calculului diferenţial sau integral în probleme practice.

Conținuturi

1. Noţiuni teoretice
2. Exerciţii propuse clasa a X-a
   - Calcule cu puteri şi radicali
   - Logaritmi
   - Proprietăţi ale funcţiilor
   - Ecuaţii iraţionale
   - Ecuaţii exponenţiale şi logaritmice
   - Funcţii trigonometrice directe şi inverse
   - Numere complexe
   - Elemente de combinatorică
   - Elemente de teoria probabilităţilor
   - Exerciţii recapitulative
3. Exerciţii propuse clasa a XII-a
   - Mulţimi de numere

Noţiuni teoretice

Formule de calcul

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$

Funcţia de gradul I

Definiţie: $f:R \to R, f(x)=ax+b, a \neq 0$, $a,b \in R$, se numeşte funcţia de gradul I

Proprietăţi: Dacă $a>0$ f este strict crescătoare

Dacă $a<0$ f este strict descrescătoare

$A(\alpha,\beta) \in G_f \Leftrightarrow f(\alpha) = \beta$

Funcţia de gradul II

Definiţie: $f:R \to R, f(x)=ax^2+bx+c, a \neq 0$, $a,b,c \in R$ se numeşte funcţia de gradul II

Maximul sau minimul funcţiei de gradul II

Dacă $a<0$ atunci $f_{max} = \dfrac{-\Delta}{4a}$, *realizat* pentru $x = \dfrac{-b}{2a}$

Dacă $a>0$ atunci $f_{min} = \dfrac{-\Delta}{4a}$, *realizat* pentru $x = \dfrac{-b}{2a}$;Vârful parabolei $V\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$

Ecuaţia de gradul II: $ax^2+bx+c=0$; $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, $\Delta = b^2 - 4ac$

Relaţiile lui Viete: $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

Dacă $\Delta > 0 \Rightarrow$ ecuaţia are rădăcini reale şi diferite.

Dacă $\Delta = 0 \Rightarrow$ ecuaţia are rădăcini reale şi egale.

Dacă $\Delta < 0 \Rightarrow$ ecuaţia nu are rădăcini reale.

Dacă $\Delta \geq 0 \Rightarrow$ ecuaţia are rădăcini reale.

Intervale de monotonie :a<0

x	$-\infty$		$\dfrac{-b}{2a}$		∞
f(x)		$\nearrow$	$\dfrac{-\Delta}{4a}$	$\searrow$	

a>0

x	$-\infty$		$\dfrac{-b}{2a}$		∞
f(x)		$\searrow$	$\dfrac{-\Delta}{4a}$	$\nearrow$	

Semnul funcției de gradul II

$\Delta > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2	∞
f(x)	semnul lui a		0	semn contrar lui a	0	semnul lui a

$\Delta = 0$

x	$-\infty$		$x_1 = x_2$		∞
f(x)		semnul lui a	0	semnul lui a	

$\Delta < 0$

x	$-\infty$	∞
f(x)	semnul lui a	

Imaginea funcției de gr.II

$a<0, \mathrm{Imf}=(-\infty, \frac{-\Delta}{4a}]$

$a>0, \mathrm{Imf}=[\frac{-\Delta}{4a}, \infty)$

Funcții

Definiții: Fie $f:A \to B$

I. 1) **Funcția f se numește injectivă**, dacă $\forall x_1, x_2 \in A$ cu $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

2) **Funcția f este injectivă** dacă $\forall x_1, x_2 \in A$ cu $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

3) **Funcția f este injectivă**, dacă orice paralelă la axa 0x, dusă printr-un punct al lui B, intersectează graficul funcției în cel mult un punct.

4) Funcția f nu este injectivă dacă $\exists x_1 \neq x_2 a.i. f(x_1) = f(x_2)$

II. 1) **Funcția *f* este surjectivă**, dacă $\forall$ y $\in$ B, există cel puțin un punct x $\in$ A, a.î. f(x)=y.

2) Funcția f este surjectivă, dacă f(A) =B.

3) Funcția f este surjectivă, dacă orice paralelă la axa 0x, dusă printr-un punct al lui B, intersectează graficul funcției în cel puțin un punct.

III. 1) **Funcția *f* este bijectivă** dacă este injectivă și surjectivă.

2) Funcția f este bijectivă dacă pentru orice y $\in$ B există un singur x $\in$ A a.î. f(x) =y (ecuația f(x)=y, are o singură soluție, pentru orice y din B)

3) Funcția f este bijectivă dacă orice paralelă la axa 0x, dusă printr-un punct al lui B, intersectează graficul funcției într-un singur punct .

IV. Compunerea a două funcții

Fie $f:A \to B, g:B \to C$

$g \circ f : A \to C, (g \circ f)(x) = g(f(x))$

V. $1_A : A \to A$ prin $1_A(x) = x$, $\forall x \in A$.(aplicația identică a lui A)

Definiție: Funcția f: A→B **este inversabilă** , dacă există o funcție g:B→A astfel încât $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$, funcția g este inversa funcției f și se notează cu f^{-1}.

Teoremă: f este bijectivă <=> f este inversabilă.

Funcţii pare,funcţii impare,funcţii periodice.

Definiţii:

f:R→R se numeşte funcţie pară dacă f(-x) = f(x), $\forall\ x \in R$

f:R→R se numeşte funcţie impară dacă f(-x) = -f(x), $\forall\ x \in R$

f:A→R($A \subset R$) se numeşte periodică de perioadă $T \neq 0$, *dacă* $\forall x \in A$ avem x+T$\in A$ şi f(x+T)=f(x).Cea mai mică perioadă strict pozitivă se numeşte perioada principală.

Numărul funcţiilor f:A→B este $[n(B)]^{n(A)}$,n(A) reprezentâd numărul de elemente al mulţimii A.

Numărul funcţiilor bijective f:A→A este egal cu n!,n fiind numărul de elemente al mulţimii A.

Numărul funcţiilor injective f:A→B este A_n^k,unde n reprezintă numărul de elemente al mulţimii B, iar k al mulţimii A($k \leq n$)

Funcţia exponenţială

Definiţie f: R→ (0,∞), f(x)= a^x ,a>0,a $\neq 1$ se numeşte funcţie exponenţială.

Proprietăţi:

1)Dacă a>1 $\Rightarrow$ f strict crescătoare

2)Dacă a $\in (0,1) \Rightarrow$ f strict descrescătoare

3)Funcţia exponenţială este bijectivă

Funcţia logaritmică

Definiţie: f:(0,∞) →R, f(x)= $\log_a x$, a>0, a $\neq$ 1 se numeşte funcţie logaritmică.

Proprietăţi:

1)Dacă a >1 $\Rightarrow$ f strict crescătoare

2)Dacă a $\in (0,1) \Rightarrow$ f strict descrescătoare

3)Funcţia logaritmică este bijectivă

4)$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ 5)$\log_a x^m = m\log_a x$,$m \in R$

6)$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ 7)$a^{\log_a x} = x$

Schimbarea bazei:$\log_a A = \frac{\log_b A}{\log_b a}$,$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

Progresii aritmetice

Definiţie: Se numeşte **progresie aritmetică** un şir de numere reale a_n în care diferenţa oricăror doi termeni consecutivi este un număr constant r, numit raţia progresiei aritmetice:$a_{n+1} - a_n = r, \forall n \geq 1$

Se spune că numerele $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sunt în progresie aritmetică dacă ele sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Teoremă:şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică $\Leftrightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \forall n \geq 2$

Termenul general al unei progresii aritmetice:$a_n = a_1 + (n-1)r$

Prop.:Numerele a,b,c sunt în progresie aritmetică $\Leftrightarrow b=\frac{a+c}{2}$

Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice: $S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$

Trei numere x_1, x_2, x_3 se scriu în progresie aritmetică de forma :

$x_1=u-r, x_2=u, x_3=u+r$; $u,r\in R$.

Patru numere x_1, x_2, x_3, x_4 se scriu în progresie aritmetică astfel:

$x_1=u-3r,\ x_2=u-r,\ x_3=u+r, x_4=u+3r,\ u,r\in R$.

Progresii geometrice

Definiție : Se numește **progresie geometrică** un șir de numere reale $b_n, b_1\neq 0$ în care raportul oricăror doi termeni consecutivi este un număr constant q, numit rația progresiei geometrice: $\frac{b_{n+1}}{b_n}=q$,$q\neq 0$

Se spune că numerele $b_1, b_2, \cdots, b_n$ sunt în progresie geometrică dacă ele sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

Teoremă:șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică $\Leftrightarrow b_n^{\,2}=b_{n-1}\cdot b_{n+1}, \forall n\geq 2$

Termenul general al unei progresii geometrice: $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$

Prop.:Numerele a,b,c sunt în progresie geometrică $\Leftrightarrow b^2=a\cdot c$

Suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice: $S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$,$q\neq 1$ sau

$S_n=n\cdot b_1, dacă$ $q=1$

Trei numere x_1, x_2, x_3 se scriu în progresie geometrică de forma :

$x_1=\frac{u}{q}, x_2=u, x_3=u\cdot q, q\neq 0$

Patru numere x_1, x_2, x_3, x_4 se scriu în progresie geometrică de forma:

$x_1=\frac{u}{q^3}, x_2=\frac{u}{q}, x_3=u\cdot q, x_4=u\cdot q^3, q\neq 0$

Formule utile:

$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$1^3+2^3+\cdots+n^3=[\frac{n(n+1)}{2}]^2$

Modulul numerelor reale Proprietăți:

$|x|=\begin{cases} x, x\geq 0\\ -x, x<0\end{cases}$

1. $|x| \geq 0, \forall x \in R$ **2.** $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$ **3.** $|x| = |-x|$ **4.** $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ **5.** $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

6. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a, a > 0$ **7.** $|x| \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty), a > 0$ **8.** $|x + y| \leq |x| + |y|$

Partea întreagă

1. $x = [x] + \{x\}, \ \forall x \in R$, $[x] \in Z$ și $\{x\} \in [0,1)$
2. $[x] \leq x < [x]+1$, $[x] = a \Rightarrow a \leq x < a+1$
3. $[x+k]=[x]+k, \forall x \in R, k \in Z$
4. $\{x+k\}=\{x\}, \forall x \in R, k \in Z$

Numere complexe

1. Numere complexe sub formă algebrică

$z = a+bi$, $a,b \in R$, $i^2 = -1$, $a = \text{Re } z$, $b = \text{Im } z$

C- mulțimea numerelor complexe; $C = \{a+bi / a,b \in R\}$

Conjugatul unui număr complex: $\bar{z} = a - bi$

Proprietăți:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
3. $\overline{z^n} = \left(\bar{z}\right)^n$
4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
5. $z \in R \Leftrightarrow z = \bar{z}$
6. $z \in R^* i \Leftrightarrow z = -\bar{z}$

Modulul unui număr complex: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Proprietăți:

1. $|z| \geq 0, \forall z \in C$ 2. $|z| = |\bar{z}|$ 3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

4. $|z^n| = |z|^n$ 5. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ 6. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Numere complexe sub formă trigonometrică

Forma trigonometrică a numerelor complexe:

$z = r(\cos t + i \sin t)$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $tgt = \frac{b}{a}$;r-raza polară;t-argument redus, $t \in [0, 2\pi)$

M(a,b)-reprezintă imaginea geometrică a numărului complex $z = a+bi$

Operații:

$z_1 = r_1(\cos t_1 + i \sin t_1), z_2 = r_2(\cos t_2 + i \sin t_2)$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(t_1 + t_2) + i \sin(t_1 + t_2)], z^n = r^n(\cos nt + i \sin nt)$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(t_1 - t_2) + i \sin(t_1 - t_2)]$

$$\sqrt[n]{z} = z_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{t+2k\pi}{n} + i\sin\frac{t+2k\pi}{n}), k \in \{0,1,\cdots,n-1\}$$

Combinatorică

$n! = 1\cdot 2\cdots n, n\in N (0!=1)$, $P_n = n!, n\in N^*$

$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, 0\le k\le n; k,n\in N, n\ge 1$ $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, 0\le k\le n; k,n\in N$

Proprietăți: 1. $C_n^k = C_n^{n-k}, 0\le k\le n; k,n\in N$ 2. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}, 1\le k < n; k,n\in N$

Binomul lui Newton: $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^n b^n$

Termenul general: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k, k = 0,1,\cdots,n$

Proprietăți:

$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$ (numărul tuturor submulţimilor unei mulţimi cu n elemente este 2^n).

$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = 2^{n-1}$

Geometrie vectorială

Definiție:

Se numesc vectori egali, vectorii care au aceeaşi direcţie,acelaşi sens şi acelaşi modul.
Doi vectori se numesc opuşi dacă au aceeaşi direcţie, acelaşi modul şi sensuri contrare:

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

Definiție:

Doi vectori se numesc **coliniari** dacă cel puțin unul este nul sau dacă amândoi sunt nenuli şi au aceeaşi direcție. În caz contrar se numesc necoliniari.

Teoremă: Fie $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ doi vectori necoliniari. Oricare ar fi vectorul $\vec{v}$, există $\alpha, \beta \in R (unice)$ astfel încât $\vec{v} = \alpha\cdot\vec{a} + \beta\cdot\vec{b}$

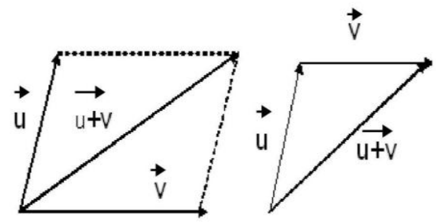
$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ -modulul vectorului $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A) - coordonatele$ vectorului $\overrightarrow{AB}$

Mijlocul segmentului AB: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

Centrul de greutate al triunghiului ABC: $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$

Adunarea vectorilor se poate face după regula paralelogramului sau triunghiului



Teoremă:Vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt **coliniari** $\Leftrightarrow \exists\ \lambda \in R$ $a.i.$ $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$.

Punctele A, B, C sunt coliniare $\Leftrightarrow \exists\ \lambda \in R$ $a.i.$ $\overrightarrow{AB} = \lambda\ \overrightarrow{AC}$

AB $\parallel$ CD $\Leftrightarrow \exists\ \lambda \in R$ $a.i.$ $\overrightarrow{AB} = \lambda\ \overrightarrow{AC}$

Produsul scalar a doi vectori .

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v})$

$\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}, v = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2, |\vec{u}| = \sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}}$

Daca $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$,atunci $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Ecuațiile dreptei în plan

Ecuația carteziană generală a dreptei:**ax+by+c=0** (d)

Punctul M(x_M ,y_M)$\in d \Leftrightarrow a \cdot x_M + by_M + c = 0$

Ecuația dreptei determinată de două puncte distincte:A(x_A, y_A),B(x_B, y_B)

AB: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix}$=0

Ecuația dreptei determinată de un punct A(x_A, y_A)și panta m : y-$y_A = m(x - x_A)$

Dreptele d_1,d_2 sunt paralele $\Leftrightarrow m_{d_1} = m_{d_2}$

Dreptele d_1,d_2 sunt perpendiculare $\Leftrightarrow m_{d_1} \cdot m_{d_2} = -1$

Distanța dintre punctele A(x_A, y_A),B(x_B, y_B):AB=$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Distanța de la punctul A(x_A, y_A) la dreapta h:ax+by+c=0:

d(A,h)=$\dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Punctele A,B,C sunt coliniare$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$

Permutări

Definiție:Se numește permutare de gradul n a mulțimii $A = \{1,2,\cdots,n\}$ orice funcție bijectivă $\sigma : A \to A$.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ se numește permutarea identică de gradul n**.**

S_n reprezintă mulțimea permutărilor de gradul n.

Produsul(compunerea) a două permutări:Fie $\sigma, \tau \in S_n$

$\sigma \circ \tau : A \to A, (\sigma \circ \tau)(k) = \sigma(\tau(k))$

Proprietăți:

1) $(\sigma\tau)\delta = \sigma(\tau\delta), \forall \sigma, \tau, \delta \in S_n$

2) $\sigma e = e\sigma = \sigma, \forall \sigma \in S_n$

3) $\forall \sigma \in S_n, \exists \sigma^{-1} \in S_n a.i. \sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e$ **,** σ^{-1} se numește inversa permutării σ

Puterile unei permutări: $Fie \sigma \in S_n - definim \sigma^n = \sigma^{n-1}\sigma, n \in N^* (\sigma^0 = e)$

Prop.: $Fie \sigma \in S_n \Rightarrow \sigma^m \sigma^n = \sigma^{m+n}, (\sigma^m)^n = \sigma^{mn}, \forall m, n \in N$

Inversiunile unei permutări:

Definiție: $Fie \sigma \in S_n$ și i,j $\in \{1,2,\cdots,n\}$ $,i \langle j$ .Perechea (i,j) se numește inversiune a permutării σ dacă $\sigma(i) \rangle \sigma(j)$ .Numărul inversiunilor permutării σ se notează cu m(σ).

Definiții: Se numește semnul permutării σ ,numărul $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$

Permutarea σ se numește permutare pară dacă $\varepsilon(\sigma) = 1$

Permutarea σ se numește permutare impară dacă $\varepsilon(\sigma) = -1$

Propoziție: $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau), \forall \sigma, \tau \in S_n$

Permutarea $\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & j & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & j & i & \cdots & n \end{pmatrix}$ se numește transpoziție.

Proprietăți:

1) $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ 2) $(\delta_{ij})^2 = e$ 3) $\delta_{ij}^{-1} = \delta_{ij}$ 4) $\varepsilon(\delta_{ij}) = -1$

Matrice

A= $\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}......a_{1n} \\ a_{21}a_{22}......a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}.....a_{mn} \end{pmatrix}$ -matrice cu m linii și n coloane; $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$

$A \in M_{m,n}(C)$ **,**unde $M_{m,n}(C)$ **-**reprezintă mulțimea matricelor cu m linii și n coloane cu elemente din C.

${}^tA \in M_{n,m}(C)$ -reprezintă transpusa lui A şi se obţine din A prin schimbarea liniilor în coloane(sau a coloanelor în linii).

Dacă m = n atunci matricea se numeşte pătratică de ordinul n şi are forma

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}......a_{1n} \\ a_{21}a_{22}......a_{2n} \\ .... \\ a_{n1}a_{n2}.....a_{nn} \end{pmatrix} - A \in M_n(C)$$

Tr(A)= $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ -reprezintă urma matricei A

Sistemul ordonat de elemente $(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$ se numeşte diagonala principală a matricei A,iar sistemul ordonat de elemente $(a_{1n},\cdots,a_{n1})$ se numeşte diagonala secundară a matricei A.

$$I_n=\begin{pmatrix} 100\cdots\cdots 0 \\ 010\cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 000\cdots\cdots 1 \end{pmatrix} \text{-matricea unitate de ordinul n ; } O_{m,n}=\begin{pmatrix} 000\cdots\cdots 0 \\ 000\cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 000\cdots\cdots 0 \end{pmatrix} \text{-matricea nulă}$$

Proprietăţi ale operaţiilor cu matrice.:

1)A+B=B+A , $\forall A,B \in M_{m,n}(C)$ (comutativitate)

2)(A+B)+C = A+(B+C) , $\forall A,B,C \in M_{m,n}(C)$ (asociativitate)

3)A+$O_{m,n}$ = $O_{m,n}$ +A = A , $\forall A \in M_{m,n}(C)$

4) $\forall A \in M_{m,n}(C), \exists(-A) \in M_{m,n}(C)$ a.î. A+(-A) = (-A)+A=$O_{m,n}$, $\forall A \in M_{m,n}(C)$

5)(AB)C = A(BC) , $A \in M_{m,n}(C), B \in M_{n,p}(C), C \in M_{p,q}(C)$ (asociativitate)

6)a)A(B+C) = AB+AC , $A \in M_{m,n}(C), B,C \in M_{n,p}(C)$ (distributivitatea înmulţirii faţă de adunare)

b)(B+C)A = BA+CA, $B,C \in M_{m,n}(C), A \in M_{n,p}(C)$

7) $AI_n = I_nA = A, \forall A \in M_n(C)$

8)a(bA) = (ab)A, $\forall a,b \in C, A \in M_{m,n}(C)$

9)(a+b)A=aA+bA, $\forall a,b \in C, A \in M_{m,n}(C)$

10)a(A+B)=aA+aB, $\forall a \in C, A,B \in M_{m,n}(C)$

11)aA = $O_{m,n} \Leftrightarrow a=0$ sau A= $O_{m,n}$

12) ${}^t({}^tA)=A, {}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$, ${}^t(aA)=a{}^tA, {}^t(AB)={}^tB{}^tA$

Puterile unei matrice: Fie $A \in M_n(C)$

Definim $A^0=I_n, A^1=A, A^2=A\cdot A, A^3=A^2\cdot A,\cdots, A^n=A^{n-1}\cdot A, n\in N^*$

Relaţia Hamilton-Cayley: $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=O_2$,unde $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Determinanţi.

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ (determinantul de ordinul doi)

Determinantul de ordinul trei(regula lui Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd$$

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix}$$

Proprietăți:

1. Determinantul unei matrice este egal cu determinantul matricei transpuse;
2. Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) dintr-o matrice sunt nule, atunci determinantul matricei este nul;
3. Dacă într-o matrice schimbăm două linii(sau coloane) între ele obținem o matrice care are determinantul egal cu opusul determinantului matricei inițiale.
4. Dacă o matrice are două linii (sau coloane) identice atunci determinantul său este nul;
5. Dacă toate elementele unei linii(sau coloane) ale unei matrice sunt înmulțite cu un element a, obținem o matrice al cărei determinant este egal cu a înmulțit cu determinantul matricei inițiale.
6. Dacă elementele a două linii(sau coloane) ale unei matrice sunt proporționale atunci determinantul matricei este nul;
7. Dacă o linie (sau coloană) a unei matrice pătratice este o combinație liniară de celelalte linii(sau coloane) atunci determinantul matricei este nul.
8. Dacă la o linie (sau coloană) a matricei A adunăm elementele altei linii (sau coloane) înmulțite cu același element se obține o matrice al cărei determinant este egal cu determinantul matricei inițiale;

9) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+m & e+n & f+p \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ g & h & i \end{vmatrix}$

10) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$, $\forall$ $A, B \in M_n(C)$

Definiție:Fie $A = (a_{ij}) \in M_n(C)$ .Se numește minor asociat elementului $a_{ij}, 1 \le i, j \le n$ determinantul matricei obținute din A prin eliminarea liniei i şi a coloanei j.Se notează acest minor cu M_{ij}.

Numărul $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ se numește complementul algebric al elementului a_{ij}.

Matrice inversabile

Inversa unei matrice :$A \in M_n(C)$ se numește inversabilă dacă există o matrice notată $A^{-1} \in M_n(C)$ a.i. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$

Teoremă: $A \in M_n(C)$ *inversabilă* $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$, A^* adjuncta matricei A. A^* se obține din ${}^tA$ înlocuind fiecare element cu complementul său algebric.

Dacă $A,B \in M_n(C)$ sunt inversabile, atunci au loc relațiile: a) $(A^{-1})^{-1} = A$ b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Rangul unei matrice

Fie $A \in M_{m,n}(C)$, $r \in N, 1 \leq r \leq \min(m,n)$

Definiție: Se numește minor de ordinul r al matricei A, determinantul format cu elementele matricei A situate la intersecția celor r linii și r coloane.

Definiție: Fie $A \neq O_{m,n}$ o matrice . Numărul natural r este rangul matricei A $\Leftrightarrow$ există un minor de ordinul r al lui A, nenul, iar toți minorii de ordin mai mare decât r (dacă există) sunt nuli.

Teoremă: Matricea A are rangul r $\Leftrightarrow$ există un minor de ordin r al lui A, nenul , iar toți minorii de ordin r+1 (dacă există) obtinuți prin bordarea (adaugarea unei linii și a unei coloane) minorului de ordin r cu elementele corespunzatoare ale uneia dintre liniile și uneia dintre coloanele rămase sunt zero.

Sisteme de ecuații liniare

Forma generală a unui sistem de m ecuații cu n necunoscute:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

a_{ij} -coeficienții necunoscutelor, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ - necunoscute, $b_1, b_2, \cdots, b_m$ -termenii liberi

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$ -matricea sistemului, $$\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots\ldots a_{1n}b_1 \\ a_{21}a_{22}\ldots\ldots a_{2n}b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots\ldots a_{mn}b_m \end{pmatrix}$$ -matricea extinsă

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$ matricea coloană a termenilor liberi, $$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$ .matricea necunoscutelor.

AX=B -forma matriceală a sistemului

Definiție:

- Un sistem se numește incompatibil dacă nu are soluție;
- Un sistem se numește compatibil dacă are cel puțin o soluție;
- Un sistem se numește compatibil determinat dacă are o singură soluție;

- Un sistem se numeşte compatibil nedeterminat dacă are mai mult de o soluţie.

Rezolvarea sistemelor prin metoda lui Cramer:

Un sistem de ecuaţii liniare este de tip Cramer dacă numărul de ecuaţii este egal cu numărul de necunoscute şi determinantul matricei sistemului este nenul.

Teorema lui Cramer: Dacă det A notat $\Delta \neq 0$, atunci sistemul AX=B are o soluţie unică $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$,unde Δ_i se obţine înlocuind coloana i cu coloana termenilor liberi.

Teorema lui Kronecker- Capelli: Un sistem de ecuaţii liniare este compatibil $\Leftrightarrow$ rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse.

Teorema lui Rouche: Un sistem de ecuaţii liniare este compatibil $\Leftrightarrow$ toţi minorii caracteristici sunt nuli.

Elemente de geometrie şi trigonometrie

Formule trigonometrice.Proprietăţi.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in R$$

$-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in R$ $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in R$

$\sin(x+2k\pi) = \sin x, \forall x \in R, \forall k \in Z$ $\cos(x+2k\pi) = \cos x, \forall x \in R, \forall k \in Z$

sin(a+b)=sinacosb+sinbcosa cos(a+b)=cosacosb-sinasinb

sin(a-b)=sinacosb-sinbcosb cos(a-b)=cosacosb+sinasinb

sin2x=2sinxcosx, $\cos 2x=\cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$

$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$ $\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

$\sin a-\sin b=2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$ $\cos a-\cos b= -2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}$

$tgx=\frac{\sin x}{\cos x}, \cos x \neq 0$ $ctgx=\frac{\cos x}{\sin x}, \sin x \neq 0$

$tg(x+k\pi) = tgx$ $ctg(x+k\pi) = ctgx$

$tg(\frac{\pi}{2} - x) = ctgx$ $ctg(\frac{\pi}{2} - x) = tgx$

$tg(a+b)=\frac{tga+tgb}{1-tgatgb}$ $tg(a-b)=\frac{tga-tgb}{1+tgatgb}$

$tg2x=\frac{2tgx}{1+tg^2 x}$

$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$ $\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$

Valori principale ale funcţiilor trigonometrice

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sinx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tgx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
ctgx	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

Semnele funcţiilor trig.

sin:+,+,-,- tg.,ctg.:+,-,+,-

cos:+,-,-,+

sin(-x)= -sinx (impară) cos(-x)=cosx(pară)

tg(-x)= -tgx ctg(-x)= -ctgx

Funcţii trigonometrice inverse

arcsin:[-1,1]$\rightarrow [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ arcsin(-x)= -arcsinx

arcsin(sinx)=x, $\forall x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ sin(arcsinx)=x,$x \in [-1,1]$

arccos:[-1,1]$\rightarrow [0,\pi]$ arccos(-x)=$\pi - \arccos x$

arccos(cosx)=x, $\forall x \in [0,\pi]$ cos(arccosx)=x, $\forall x \in [-1,1]$

arcsinx+arccosx=$\frac{\pi}{2}$, $\forall x \in [-1,1]$

arctg:R$\rightarrow (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ arctg(-x)= -arctgx

arctg(tgx)=x, $\forall x \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ tg(arctgx)=x, $\forall x \in R$

arcctg:R$\rightarrow (0,\pi)$ arcctg(-x)=$\pi - arcctgx$

arcctg(ctgx)=x, $\forall x \in (0,\pi)$ ctg(arcctgx)=x, $\forall x \in R$

arctgx+arcctgx=$\frac{\pi}{2}$, $\forall x \in R$

Ecuaţii trigonometrice

sinx = a,a$\in [-1,1] \Rightarrow x \in \{(-1)^k \arcsin a + k\pi, k \in Z\}$

cosx = b,b$\in [-1,1] \Rightarrow x \in \{\pm \arccos b + 2k\pi, k \in Z\}$

tgx = c,c$\in R \Rightarrow x \in \{arctgc + k\pi, k \in Z\}$

ctgx = d,d$\in R \Rightarrow x \in \{arcctgd + k\pi, k \in Z\}$

sinax = sinbx $\Rightarrow ax = (-1)^k bx + k\pi, k \in Z$

cosax = cosbx $\Rightarrow ax = \pm bx + 2k\pi, k \in Z$

tgax = tgbx $\Rightarrow ax = bx + k\pi, k \in Z$

ctgax = ctgbx $\Rightarrow ax = bx + k\pi, k \in Z$

Teorema sinusurilor: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ =2R,unde R este raza cercului circumscris triunghiului.

Teorema cosinusului:$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Aria unui triunghi:

$A_\Delta = \frac{b \cdot h}{2}$ $A_\Delta = \frac{AB \cdot AC \sin(AB, AC)}{2}$ $A_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,p=$\frac{a+b+c}{2}$

$A_{\Delta ABC} = \frac{|\Delta|}{2}, \Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$ $A_{\Delta dreptunghic} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2}$ $A_{\Delta echilateral} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

Raza cercului circumscris unui triunghi:R=$\frac{abc}{4S}$,unde S este aria triunghiului

Raza cercului înscris într-un triunghi: r=$\frac{S}{p}$,unde S este aria triunghiului iar p=$\frac{a+b+c}{2}$

Grupuri

Definiție: Fie $*: M \times M \to M$ lege de compozitie pe M.O submultime nevidă H a lui M ,se numește parte stabilă a lui M în raport cu legea "$*$" dacă $\forall x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$.

Proprietățile legilor de compoziție

Fie $*: M \times M \to M$ lege de compoziție pe M.

Legea "$*$" se numește asociativă dacă $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in M$

Legea "$*$" se numește comutativă dacă $x * y = y * x, \forall x, y \in M$

Legea "$*$" admite element neutru dacă exista $e \in M$ a.i.$x * e = e * x = x, \forall x \in M$

Definiție: Cuplul (M,$*$) formează un monoid dacă are proprietățile:

1)$(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in M$

2) există $e \in M$ a.i.$x * e = e * x = x, \forall x \in M$

Dacă în plus $x * y = y * x, \forall x, y \in M$ atunci monoidul se numește comutativ.

Notație:U(M)=$\{x \in M / x$ este simetrizabil$\}$

Definiție: Cuplul (G,$*$) formează un grup dacă are proprietățile:

1)$(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in G$

2) există $e \in M$ a.i.$x * e = e * x = x, \forall x \in G$

3) $\forall x \in G, \exists x' \in G$ a.i. $x * x' = x' * x = e$

Dacă în plus $x * y = y * x, \forall x, y \in G$ atunci grupul se numește abelian sau comutativ.

Definiție: Un grup G se numește finit dacă mulțimea G este finită și grup infinit ,în caz contrar. Se numește ordinul grupului G ,cardinalul mulțimii G(numărul de elemente din G).

Ordinul unui element

Definiție:Fie (G,•) un grup și $x \in G$.Cel mai mic număr natural nenul n cu proprietatea $x^n = e$ se numește ordinul elementului x în grupul G.(ordx = n)

Subgrup

Definiție:Fie (G,∗) un grup.O submulțime nevidă H a lui G se numește subgrup al grupului (G,∗) dacă îndeplinește condițiile:

1) $\forall x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$.

2) $\forall x \in H \Rightarrow x' \in H$

Grupul claselor de resturi modulo n, $Z_n = \{\hat{1}, \hat{2}, \cdots, \widehat{n-1}\}$

$(Z_n, +)$ – **grup abelian**

$(Z_n, \cdot)$ **-monoid comutativ** ,în care $U(Z_n) = \{\hat{k} \in Z_n / c.m.m.d.c.(k,n) = 1\}$

Morfisme și izomorfisme de grupuri

Definiție:Fie (G,∗) și (G',∘) două grupuri.O funcție $f: G \to G'$ se numește morfism de grupuri dacă are loc conditia $f(x * y) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in G$

Dacă în plus f este bijectivă atunci f se numește izomorfism de grupuri.

Prop. Fie (G,∗) și (G',∘) două grupuri.Dacă $f: G \to G'$ este morfism de grupuri atunci:

1)f(e)=e' unde e,e' sunt elementele neutre din cele două grupuri.

2)$f(x') = [f(x)]' \; \forall x \in G$

Inele și corpuri

Definiție: Un triplet (A,∗,∘), unde A este o multime nevidă iar „∗" și „∘" sunt două legi de compozitie pe A,este inel dacă:

1) (A,∗)este grup abelian
2) (A,∘)este monoid
3)Legea „∘"este distributivă fata de legea „∗":

$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z), (y * z) \circ x = (y \circ x) * (z \circ x) \forall x, y, z \in A$

Inelul (A,∗,∘), este fără divizori ai lui 0,dacă $\forall x.y \neq e_* \Rightarrow x \circ y \neq e_*$ (e_* element neutru de la legea „∗")

Un inel (A,∗,∘), se numește comutativ dacă satisface și axioma: $x \circ y = y \circ x, \forall x, y \in A$

Un inel (A,∗,∘), comutativ,cu cel putin 2 elemente și fără divizori ai lui 0, se numește,**domeniu de integritate** .

Definiție :Un inel (K,∗,∘) cu $e_* \neq e_\circ$ se numește corp dacă $\forall x \in K, x \neq e_*, \exists x' \in K$ a.i. $x \circ x' = x' \circ x = e_\circ$ ($e_*, e_\circ$ fiind elementele neutre)

Un corp (K,∗,∘), se numește comutativ dacă satisface și axioma: $x \circ y = y \circ x, \forall x, y \in K$

Obs.:Corpurile nu au divizori ai lui zero.

Morfisme și izomorfisme de inele și corpuri.

Definiție : Fie (A,∗,∘), $(A' \oplus, \otimes)$ două inele.O funcție $f: A \to A'$ se numește morfism de inele dacă :

1)$f(x * y) = f(x) \oplus f(y), \forall x, y \in A$

1)f($x \circ y) = f(x) \otimes f(y), \forall x, y \in A$

3)f($e_\circ$)=$e_\otimes$ ($e_\circ$, $e_\otimes$ fiind elementele neutre corespunzătoare legilor $\circ, \otimes$)

Dacă în plus f este bijectivă atunci f se numeşte izomorfism de inele.

Definiție:Fiind date corpurile K, K' ,orice morfism(izomorfism) de inele de la K la K' ,se numeşte morfism(izomorfism)de corpuri.

Inele de polinoame

Forma algebrică a unui polinom:f =$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0, a_i \in A$ un inel comutativ.

Definiție:a$\in A$ se numeşte rădăcină a polinomului f dacă f(a)=0.

Teorema împărţirii cu rest: Fie K un corp comutativ,iar f şi g,cu g$\neq 0$, *polinoame* din K[X].Atunci există polinoamele q şi r din K[X] ,unic determinate,astfel încât f=gq+r cu gradr<gradg.

Dacă r = 0,adică f = gq ,atunci spunem că polinomul g divide polinomul f.

Teorema restului: Fie K un corp comutativ,f un polinom din K[X] şi a un element din K $\Rightarrow$restul împărţirii lui f la X-a este f(a).

Consecinţă:a este radăcină a lui f $\Leftrightarrow$ X-a divide f.

Definiţie: Elementul a$\in K$ este rădăcină de ordinul p$\in N^*$ pentru polinomul f$\in K[X]$ dacă (X-a)^p divide pe f iar (X-a)$^{p+1}$nu divide pe f.

Teoremă: Elementul a$\in K$ este rădăcină de ordinul p$\in N^*$ pentru polinomul f$\in K[X] \Leftrightarrow f(a) = 0, f'(a) = 0, \cdots, f^{(p-1)}(a) = 0$ şi $f^{(p)}(a) \neq 0$,unde f este fucţia polinomială asociată polinomului f.

Polinoame cu coeficienţi reali

Teoremă: Fie f$\in R[X]$,f$\neq 0$.Dacă z = a+ib,b$\neq 0$este o rădăcină complexă a lui f,atunci:

1) $\overline{z}$ = a-ib este de asemenea o rădăcină complexă a lui f

1)z şi $\overline{z}$ au acelaşi ordin de multiplicitate.

Obs. :$(X - z)(X - \overline{z}) / f$

Polinoame cu coeficienţi raţionali

Teoremă :Fie f$\in Q[X]$, f$\neq 0$.Dacă $x_0 = a + \sqrt{b}$ este o rădăcină a lui f,unde a,b$\in Q, b\rangle 0, \sqrt{b} \notin Q$,atunci

1) $\overline{x_0} = a - \sqrt{b}$ este de asemenea o rădăcină a lui f 2)x_0, $\overline{x_0}$ au acelaşi ordin de multiplicitate.

Obs. :$(X - x_0)(X - \overline{x_0}) / f$

Polinoame cu coeficienţi întregi

Teoremă :fie f=$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$;f$\in Z[X]$

1)Dacă $x_0 = \dfrac{p}{q}$(p, q numere prime între ele) este o rădăcină raţională a lui f,atunci

a)p divide termenul liber a_0

b)q divide pe a_n

2)Dacă $x_0 = p$ este o rădăcină întreagă a lui f,atunci p este un divizor al lui a_0.

Polinoame ireductibile

Definiție: Fie K un corp comutativ, f un polinom din K[X] cu gradf>0 se numește reductibil peste K dacă există g,q din K[X] cu gradg<gradf, gradq<gradf astfel încât f=gq.

Dacă f nu este reductibil peste K atunci se spune că f este ireductibil peste K.

Prop.: Polinoamele de grad 2 sau 3 din K[X] sunt ireductibile peste K $\Leftrightarrow$ nu au rădăcini în K.

Relațiile lui Viete: Fie K un corp comutativ, f un polinom din K[X],

f $= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$. Dacă $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sunt n rădăcini ale lui f în K

atunci f $= a_n(X - x_1)(X - x_2)\cdots(X - x_n)$ și

$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -a_{n-1} \cdot a_n^{-1}$

$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = a_{n-2}a_n^{-1}$

....

$x_1 x_2 \cdots x_n = (-1)^n a_0 a_n^{-1}$

Dacă f $= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, f \in C[X] \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{a_2}{a_3} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{a_1}{a_3} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{a_0}{a_3} \end{cases}$

f=$a_4 x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, f \in C[X] \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{a_3}{a_4} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_3x_4 = \dfrac{a_2}{a_4} \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\dfrac{a_1}{a_4} \\ x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{a_0}{a_4} \end{cases}$

Ecuații reciproce

Definiție: O ecuație de forma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, a_n \neq 0$ pentru care $a_{n-i} = a_i, 0 \le i \le n$ se numește ecuație reciprocă de gradul n.

Orice ecuație reciprocă de grad impar are rădăcina -1.

Ecuația reciprocă de gradul IV are forma: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a, a \neq 0$

Se împarte prin x^2 și devine $a(x^2 + \frac{1}{x^2}) + b(x + \frac{1}{x}) + c = 0$; notez $x + \frac{1}{x} = t$ și obținem o ecuație de gradul II.

Șiruri de numere reale

Șir monoton (crescător sau descrescător)

Fie $(a_n)_{n\in N}$ un şir de numere reale.

Şirul (a_n) este crescător dacă: $a_n \le a_{n+1}, \forall n \in N$.

Şirul (a_n) este strict crescător dacă: $a_n < a_{n+1}, \forall n \in N$.

Şirul (a_n) este descrescător dacă: $a_n \ge a_{n+1}, \forall n \in N$.

Şirul (a_n) este strict descrescător dacă: $a_n > a_{n+1}, \forall n \in N$.

Şir mărginit

Fie $(a_n)_{n\in N}$ un şir de numere reale.

Şirul (a_n) este mărginit dacă: $\exists \alpha, \beta \in \mathrm{R}$ a.i. $\alpha \le a_n \le \beta, \forall n \in N$

Definiţie

Un şir care are limita finită se numeşte convergent.

Un şir care nu are limită sau care are limita infinită se numeşte divergent

Teoremă :Orice şir convergent este mărginit.

Consecinţă :Dacă un şir este nemărginit atunci el este divergent.

Teoremă Dacă un şir are limită, atunci orice subşir al său are aceeaşi limită.

Consecintă: dacă un şir conţine două subşiruri cu limite diferite, atunci şirul nu are limită.

▪**Teorema lui Weierstrass**

Orice şir monoton şi mărginit este convergent.

▪**Teorema cleştelui**

Dacă $x_n \le a_n \le y_n, \forall n \ge k$ si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = l$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

▪ **Criteriul raportului**

Fie $(a_n)_{n\in N}$ un şir cu termeni strict pozitivi. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0,1)$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Daca $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in (1,\infty)$ sau $l = \infty$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

▪ **Lema lui Stolz-Cezaro**

Fie $(a_n)_{n\in N}$ şi $(b_n)_{n\in N}$ două şiruri de numere reale.

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l$ (finit sau infinit) şi $(b_n)_{n\in N}$ este strict monoton şi nemărginit ,

atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$

▪ **Criteriul radicalului**

Fie $(a_n)_{n\in N}$ un şir cu termeni strict pozitivi.Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

Şiruri remarcabile

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, \text{dacă } q \in (-1,1) \\ 1, \textit{dacă } q = 1 \\ \infty, \textit{dacă } q \in (1,\infty) \\ \textit{nu există, dacă } q \in (-\infty,-1] \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} \infty, \alpha \rangle 0 \\ 0, \alpha \langle 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} n^k a^n = 0$, unde $a \in (-1,1), k \in N$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$; $e = 2{,}7178$...este constanta lui Euler

generalizare: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$ dacă $x_n \to \pm\infty$; $\lim\limits_{n\to\infty}(1+y_n)^{\frac{1}{y_n}} = e$ dacă $y_n \to 0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n} = 1$ dacă $x_n \to 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg} x_n}{x_n} = 1$ dacă $x_n \to 0$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\arcsin x_n}{x_n} = 1$ dacă $x_n \to 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{arc\operatorname{tg} x_n}{x_n} = 1$ dacă $x_n \to 0$,

Limite de functii

Teoremă:O funcţie are limită într-un punct finit de acumulare dacă şi numai dacă are limite laterale egale în acel punct.

f are limită în $x_0 \Leftrightarrow l_s(x_0) = l_d(x_0) \Leftrightarrow f(x_0-0) = f(x_0+0) \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$

Obs.:Funcţia f :D $\to R$ nu are limită în punctul de acumulare x_0 în una din situaţiile :

a)există un şir $x_n \in D-\{x_0\}$ cu limita x_0 astfel încât şirul $(f(x_n))$ nu are limită

b)există şirurile $(x_n),(y_n), x_n, y_n \in D-\{x_0\}$, astfel încât şirurile $(f(x_n)),(f(y_n))$ au limite diferite.

Teoremă: Fie f :D $\to R$,o funcţie elementară şi $x_0 \in D$ un punct de acumulare al lui D $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Teoremă(Criteriul majorării,cazul limitelor finite)

Fie f,g:D $\to R$ şi x_0 un punct de acumulare al lui D.Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ şi există $l \in R$ a.î. $|f(x)-l| \le g(x), \forall x \in D\cap V, x \ne x_0$, V vecinătate a lui x_0 şi dacă $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$

Teoremă(Criteriul majorării,cazul limitelor infinite)

Fie f,g:D $\to R$, x_0 un punct de acumulare al lui D şi $f(x) \le g(x), \forall x \in D\cap V, x \ne x_0$,V vecinătate a lui x_0.

a)Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$

b)Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

Teoremă(Criteriul cleştelui)

Fie f,g,h:D $\to R$, x_0 un punct de acumulare al lui D şi

$f(x) \le g(x) \le h(x), \forall x \in D\cap V, x \ne x_0$, V vecinătate a lui x_0.

Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = l \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l$

Limite uzuale.Limite remarcabile.

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \frac{a_k}{b_m}, k = m \\ 0, m\rangle k \\ \frac{a_k}{b_m}\cdot(\pm\infty)^{k-m}, k\rangle m \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x} = \infty \qquad \lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x} = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases}\infty \text{, daca } a>1 \\ 0 \text{, daca } a\in(0,1)\end{cases} \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases}0 \text{, daca } a>1 \\ \infty \text{, daca } a\in(0,1)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty}\log_a x = \begin{cases}\infty \text{, daca } a>1 \\ -\infty \text{, daca } a\in(0,1)\end{cases} \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\log_a x = \begin{cases}-\infty \text{, daca } a>1 \\ \infty \text{, daca } a\in(0,1)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty}\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to\infty} arcctgx = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} arcctgx = \pi$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a \ , \ a>0, a\neq 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} u(x)}{u(x)} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin u(x)}{u(x)} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} u(x)}{u(x)} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+u(x))}{u(x)} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^{u(x)} - 1}{u(x)} = \ln a \ , \ a>0, a\neq 1 \text{ unde } \lim_{x\to x_0} u(x) = 0$$

Operații fără sens: $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty-\infty, 0\cdot\infty, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0$

Funcții continue

Definiție Fie $f : D \to R$ și $x_0 \in \mathrm{D}$ punct de acumulare pentru D

f este continuă în $x_0 \in \mathrm{D}$ dacă $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Dacă f nu este continuă în $x_0 \in \mathrm{D}$,ea se numește discontinuă în x_0,iar x_0 se numește punct de discontinuitate.

Definiții: Un punct de discontinuitate $x_0 \in \mathrm{D}$ este punct de discontinuitate de prima speță pentru f ,dacă limitele laterale ale funcției f în punctul x_0 există și sunt finite.

Un punct de discontinuitate $x_0 \in D$ este punct de discontinuitate de speţa a doua dacă nu este de prima speţă.(cel puţin una din limitele laterale ale funcţiei f în punctul x_0 nu este finită sau nu există)

Teoremă: Fie $f: D \to R$ şi $x_0 \in D$ punct de acumulare pentru D $\Rightarrow$ f continuă în x_0 $\Leftrightarrow l_s(x_0) = l_d(x_0) = f(x_0)$

Teoremă:Funcţiile elementare sunt continue pe domeniile maxime de definiţie.

Operaţii cu funcţii continue

Teoremă:Fie f,g:D$\to R$ continue pe D

$\Rightarrow f+g, f \cdot g, \frac{f}{g}(g \neq 0), |f|, \max(f,g), \min(f,g)$ sunt funcţii continue pe D.

Compunerea a două funcţii continue este o funcţie continuă.

Teoremă: Fie f:[a,b]$\to$R o funcţie continuă a.î. f(a)f(b)<0 $\Rightarrow \exists\ c \in (a,b)$ pentru care f(c)=0.

Asimptote

1.Asimptote verticale

Definiţie: Fie f :E$\to R, a \in R$ punct de acumulare pentru E.Se spune că dreapta x = a este asimptotă verticală la stanga pentru f,dacă $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \infty$ sau $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = -\infty$.

Definiţie: Fie f :E$\to R, a \in R$ punct de acumulare pentru E.Se spune că dreapta x = a este asimptotă verticală la dreapta pentru f,dacă $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \infty$ sau $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = -\infty$.

Definiţie : Fie f :E$\to R, a \in R$ punct de acumulare pentru E.Se spune că dreapta x = a este asimptotă verticală pentru f dacă ea este asimptotă verticală atât la stânga cât şi la dreapta sau numai lateral.

2.Asimptote oblice

Teorema : Fie f :E$\to R$, unde E conţine un interval de forma(a, ∞)

Dreapta y=mx+n,m$\neq 0$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul lui f dacă şi numai dacă m,n sunt numere reale finite,unde m= $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, n = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - mx]$.Analog la -$\infty$.

3.Asimptote orizontale

Dacă $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l, l$ număr finit atunci y = l este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul lui f.

Analog la -∞

Obs :O funcţie nu poate admite atât asimptotă orizontala cât şi oblică spre $+\infty$ (-∞)

Funcţii derivabile

Definiţie:Fie f:D$\to R$,$x_0 \in D$ punct de acumulare pentru D

Derivata într-un punct:$f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

f este derivabilă în x_0 dacă limita precedentă există şi este finită.

▪Dacă f este derivabilă în x_0, graficul funcţiei are în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ tangentă a cărei pantă este $f'(x_0)$ .Ecuaţia tangentei este: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Teoremă: Fie f:D→R **,** $x_0 \in D$ punct de acumulare pentru D⇒f este derivabilă în punctul de acumulare $x_0 \Leftrightarrow f_s'(x_0) = f_d'(x_0) \in$ R(finite) $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$.

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in R$.

Teoremă . Orice funcţie derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.

Puncte de întoarcere.Puncte unghiulare.

Definiţii: Fie f:D→R **,** $x_0 \in D$ punct de acumulare pentru D.Punctul x_0 se numeşte punct de întoarcere al funcţiei f, dacă f este continuă în x_0 şi are derivate laterale infinite şi diferite în acest punct. Punctul x_0 se numeşte punct unghiular al funcţiei f dacă f este continuă în x_0,are derivate laterale diferite în x_0 şi cel puţin o derivată laterală este finită.

Derivatele funcţiilor elementare

Functia	**Derivata**
c	0
x	1
$x^n, n \in \mathbf{N}^*$	nx^{n-1}
$x^r, r \in \mathbf{R}$	rx^{r-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$a^x (a > 0, a \neq 1)$	$a^x \ln a$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\text{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\text{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{arcctg}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Operaţii cu funcţii derivabile

Teoremă: Fie f,g:D$\to R$ derivabile pe D$\Rightarrow$f+g ,fg, $\frac{f}{g}$($g\neq 0$)sunt funcţii derivabile pe D.

Compunerea a două funcţii derivabile este o funcţie derivabilă.

Reguli de derivare

$$(f\pm g)' = f' \pm g' ;(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g' ;(\lambda\cdot f)' = \lambda\cdot f' ;\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$$

$$(f\circ u)' = f'(u)\cdot u'$$

Proprietăţile funcţiilor derivabile

Definiţie:Fie f:D$\to$R.Un punct $x_0 \in D$ se numeşte punct de maxim local(respectiv de minim local)al lui f dacă există o vecinătate U a punctului x_0 astfel încât $f(x)\le f(x_0)$(respectiv $f(x)\ge f(x_0)$) pentru orice $x\in D\cap U$.

Dacă $f(x)\le f(x_0)$(respectiv $f(x)\ge f(x_0)$) pentru orice $x\in D$ atunci x_0 se numeşte punct de maxim absolut(respectiv minim absolut)

Teoremă . (Fermat) Fie I un interval deschis şi $x_0 \in$ I un punct de extrem al unei funcţii f: I$\to$R. Dacă f este derivabilă în punctul x_0 atunci $f'(x_0)=0$.

Definiţie:O funcţie f: [a, b] $\to$R (a< b) se numeşte funcţie Rolle dacă este continuă pe intervalul compact [a, b] şi derivabilă pe intervalul deschis (a, b).

Teorema lui Rolle

Fie f: [a, b]$\to$ R, a< b o funcţie Rolle astfel încât f(a)= f(b), atunci există cel puţin un punct c$\in$ (a, b) astfel încât $f'(c)=0$.

Teorema(teorema lui J. Lagrange). Fie f o funcţie Rolle pe un interval compact [a, b]. Atunci $\exists$ c$\in$ (a, b) astfel încât $f(b)- f(a)= (b- a)f'(c)$

Consecinţe:

1.Dacă o funcţie derivabilă are derivata nulă pe un interval atunci ea este constantă pe acel interval.

2.Dacă două funcţii derivabile au derivatele egale pe un interval atunci ele diferă printr-o constantă pe acel interval.

Rolul primei derivate

3. Fie f o funcţie derivabilă pe un interval I.

Dacă $f'(x) > 0(f'(x)\ge 0), \forall x \in$ I , atunci f este strict crescătoare(crescătoare) pe I.

Dacă $f'(x) < 0(f'(x)\le 0), \forall x \in$ I, atunci f este strict descrescătoare(descrescătoare) pe I.

4.Fie f:D$\to R$,D interval şi $x_0 \in D$.Dacă

1)f este continuă în x_0

2)f este derivabilă pe D-$\{x_0\}$

3)există $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = l \in \overline{R}$

atunci f are derivată în x_0 şi $f'(x_0) = l$ .Dacă $l \in R$ atunci f este derivabilă în x_0.

Observaţie: Cu ajutorul primei derivate se stabilesc intervalele de monotonie ale unei funcţii derivabile şi se determină punctele de extrem local.

Rolul derivatei a doua

Teoremă: Fie *f* o funcţie de două ori derivabilă pe I.

Dacă $f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathrm{I}$, atunci *f* este convexă pe I.

Dacă $f''(x) \leq 0, \forall x \in \mathrm{I}$, atunci *f* este concavă pe I.

Definiţie: Fie *f* o funcţie continuă pe I si $x_0 \in \mathbf{I}$ punct interior intervalului. Spunem că x_0 este punct de inflexiune al graficului funcţiei dacă *f* este convexă pe o vecinătate stânga a lui x_0 şi concavă pe o vecinătate dreapta a lui x_0 sau invers.

Observaţie:Cu ajutorul derivatei a doua se stabilesc intervalele de convexitate şi concavitate şi se determină punctele de inflexiune.

Noţiunea de primitivă

Definiţie: Fie $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{R}$ interval, $f : \mathrm{I} \to \mathrm{R}$. Se numeşte primitivă a funcţiei f pe I, orice funcţie $\mathrm{F} : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ derivabilă pe I cu proprietatea $\mathrm{F}'(x) = \mathrm{f}(x), \forall x \in \mathrm{I}$.

Teoremă.Orice funcţie continuă $\mathrm{f} : \mathrm{I} \to \mathrm{R}$ posedă primitive pe I.

Teoremă:Fie $f : \mathrm{I} \to \mathrm{R}$,I interval ,o funcţie care admite primitive pe I.Atunci f are proprietatea lui Darboux.

Consecinţe:

1.Dacă $\mathrm{g} : \mathrm{I} \to \mathrm{R}$ nu are proprietatea lui Darboux pe intervalul I,atunci g nu admite primitive pe I.

2.Fie $\mathrm{g} : \mathrm{I} \to \mathrm{R}$.Dacă g(I)=$\{g(x) / x \in I\}$ nu este interval atunci g nu admite primitive pe I.

3.Dacă $\mathrm{g} : \mathrm{I} \to \mathrm{R}$ are discontinuităţi de prima speţă atunci g nu admite primitive pe I.

Tabel de integrale nedefinite

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \in N, x \in R$$

$$\int x^a = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, a \in R, a \neq -1, x \in (0,\infty)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, x \in (0,\infty) \text{ sau } x \in (-\infty,0)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a \rangle 0, a \neq 1, x \in R$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, a \neq 0, x \in (-\infty,-a) \text{ sau } x \in (-a,a) \text{ sau } x \in (a,\infty)$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C, a \neq 0, x \in R$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a}+C, a\neq 0, x\in(-a,a)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C, a\neq 0, x\in R$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C, a\neq 0, x\in(-\infty,-a) \text{ sau } x\in(a,\infty)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, x\in R$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, x\in R$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + C, \cos x\neq 0$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -ctgx + C, \sin x\neq 0$$

Integrala definită

Teoremă. Funcţiile continue pe un interval $[a,b]$ sunt integrabile pe $[a,b]$.

Teoremă. Funcţiile monotone pe un interval $[a,b]$ sunt integrabile pe $[a,b]$.

Proprietăţile funcţiilor integrabile.

a)**(Proprietatea de linearitate)**

Dacă f,g $:[a,b]\to R$ sunt integrabile şi $\lambda\in R \Rightarrow$

1) $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

2) $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx$

b)Dacă $f(x)\geq 0, x\in[a,b]$ şi este integrabilă pe $[a,b]$, atunci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

c)Dacă $f(x)\geq g(x)$ pentru orice $x\in[a,b]$ şi dacă f şi g sunt integrabile pe $[a,b]$,

atunci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

d)**(Proprietatea de aditivitate în raport cu intervalul)**

Funcţia f : [a, b]→ **R** este integrabilă pe [a, b] dacă şi numai dacă, ∀ c ∈ (a, b) funcţiile $f_1 = f|[a,c]$ şi $f_2 = f|[c,b]$ sunt integrabile şi are loc formula:

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

e)Dacă funcţia f este integrabilă pe $[a,b]$, atunci şi $|f|$ este integrabilă pe $[a,b]$ şi

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x .$$

Teoremă (Formula Leibniz - Newton)
Dacă f : [a, b]→ **R** este o funcţie integrabilă şi f admite primitive pe [a, b] atunci pentru orice primitivă F a lui f pe [a, b] are loc formula Leibniz-Newton:

$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Teorema de medie Dacă f : [a, b] → **R** este o funcţie continuă, atunci există c∈[a, b] a.i.

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(c)$.

Teorema de existenţă a primitivelor unei funcţii continue
Dacă g : [a, b]→ R este o funcţie continuă,atunci funcţia G**:** [a, b]→R,

$G(x) = \int_a^x g(t)dt, x \in [a,b]$ are proprietăţile**:**

1)G este continuă pe [a, b] şi G(a) = 0
2)G este derivabilă pe [a, b] şi $G^{'}(x) = g(x), \forall x \in [a,b]$

Reţinem: $\left(\int_a^x g(t)dt\right)^{'} = g(x)$

Teoremă (Formula de integrare prin părţi)
Fie f , g : [a, b]→ **R** cu f , g derivabile cu derivatele continue, atunci are loc **formula de integrare prin părţi**: $\int_a^b fg' dx = fg\Big|_a^b - \int_a^b f' g dx$.

Teoremă:Fie f:[-a,a] → R**,** $a \rangle 0$ o funcţie continuă.Atunci

1) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$, dacă f este funcţie pară.

2) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$,dacă f este funcţie impară.

Teoremă:Fie f:R→ R o funcţie continuă de perioadă

T$\rangle 0 \Rightarrow \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx, \forall a \in R$

Aria unui domeniu din plan
1**. Aria mulţimii** din plan D⊂ $\mathbf{R}^2$ mărginită de dreptele $x = a$, $x = b$, $y = 0$ şi graficul funcţiei f : $[a, b]$→ R pozitivă şi continuă se calculează prin formula: $\mathcal{A}(D) = \int_a^b f(x)dx$.

2. În cazul f : $[a, b]$→ R continuă şi de semn oarecare, avem: $\mathcal{A}(D) = \int_a^b |f(x)|dx$.

3. **Aria mulţimii** din plan mărginită de dreptele $x = a$, $x = b$ şi graficele funcţiilor f , g : $[a, b]$→ R continue este calculată prin formula: $\mathcal{A}(D) = \int_a^b |g(x) - f(x)|dx$.

Volumul unui corp de rotație Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă, atunci corpul C_f din spaţiu obţinut prin rotirea graficului lui f, G_f, în jurul axei Ox, are volumul calculat prin formula: .$V(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x)dx$

Clasa a X - a
Calcule cu puteri şi radicali

1. Aduceţi la o formă mai simplă expresiile:

a) $\frac{1}{2}\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)^2-\left(1+a^{\frac{1}{4}}\right)\left(1-a^{\frac{1}{4}}\right)$

b) $\left(x^{\frac{1}{2}}-2\right)^2-\left(1+2x^{\frac{1}{4}}\right)\left(1-2x^{\frac{1}{4}}\right)$

c) $\left[\frac{\left(a^{\frac{3}{2}}-\sqrt{8}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}\right)}{a+\sqrt{2a}+2}\right]^{-2}\cdot\sqrt{(a+2)^2-8a}$

d) $\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}-4x^{\frac{-1}{2}}}+\frac{2\sqrt[3]{x}}{x\cdot\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x}}\right)^{-1}\cdot\sqrt{x+4\sqrt{x}+4}$

2. Scrieţi sub formă de putere cu exponent real expresia şi determinaţi valoarea de adevăr a propoziţiei:

a) $\frac{a^{-\frac{5}{6}}\cdot a^{\frac{3}{4}}}{a^{-1,5}}=a^{1\frac{11}{12}}$ b) $\frac{b^{\frac{1}{2}}\cdot b^{-\frac{3}{4}}}{b^{-1,5}}=b^{1\frac{1}{4}}$ c) $\frac{c^{\frac{5}{6}}\cdot c^{-\frac{7}{8}}}{c^{-1,5}}=c^{1\frac{1}{24}}$

3. Să se demonstreze că $(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2$ este un număr natural.

4. Să se demonstreze că numărul $\sqrt[3]{27}-\sqrt{12}+2\sqrt{3}$ este natural.

5. Să se calculeze: $\sqrt[3]{9}-\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$

6. Să se calculeze: $\sqrt{18}-\sqrt{32}-\sqrt{50}+\sqrt{72}$

7. Să se calculeze: $\sqrt[3]{125}+\sqrt{16}-\sqrt[3]{-27}$
8. Arătaţi că: $3(2-\sqrt{2})+3\sqrt{2}=6$
9. Arătaţi că: $5(2+\sqrt{3})-\sqrt{75}$ $=10$
10. Arătaţi că: $(2+\sqrt{3})^2+(1-2\sqrt{3})^2=20$
11. Ordonaţi crescător numerele: $2\sqrt{3},\ 3\sqrt{2}\ si\ \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$
12. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $\{\sqrt[3]{1},\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{3},\dots,\sqrt[3]{30}\}$, acesta să fie număr raţional.

Logaritmi

1. Determinaţi $x\in R$ pentru care este definit logaritmul: $\log_{x+2}(9-x^2)$
2. Să se calculeze: a) $\log_5 15625$; b) $\log_4\left[\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{512}\right)\right]$; c) $\log_{\frac{2}{3}}\left(\log_5 3^{\log_3\sqrt[3]{25}}\right)$
3. Să se arate că următoarea expresie nu depinde de x: $A=\dfrac{\log_5 x^2+\log_5 x^3}{\log_4 x^2+\log_4 x^3}$
4. Calculaţi $\log_{30}7{,}2$ dacă $\log_{30}5=a$
5. Aflaţi x din egalitatea: $\log_a x=2\cdot\log_a 7+3\cdot\log_a 6-4\cdot\log_a 5$
6. Să se logaritmeze: $E=\sqrt[6]{\dfrac{a^5b}{\sqrt{bc}}}$.
7. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiilor următoare:

a. $\log_4(5x-9)=2;$

b. $\log_2(3x-1)=3.$

8. Să se calculeze:

a. $\log_3\sqrt[4]{3}+\dfrac{1}{2}\cdot\log_{\sqrt{3}}9-\log_3^2\sqrt{3}-2;$

b. $\log_2(5+\sqrt{7})+\log_2(5-\sqrt{7})-2\cdot\log_2 3.$

9. Arătaţi că expresiile următoare sunt numere naturale:

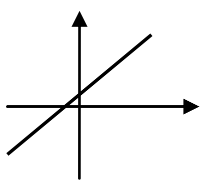
a.
$$E=\frac{1}{1+\log_2 3+\log_2 5}+\frac{1}{1+\log_3 2+\log_3 5}+\frac{1}{1+\log_5 2+\log_5 3};$$
$$F=\frac{1}{\log_3 2}+\frac{2}{\log_9 4}-\frac{3}{\log_{27} 8}.$$
b.

10. Se consideră numărul $a=\log_3 2$. Arătați că $\log_3 6=1+a$

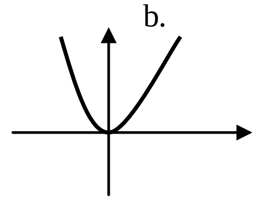
Proprietăţi ale funcţiilor

1. Care din graficele următoare sunt imaginile unor funcţii injective?

a.



b.



2. Verificaţi dacă urmatoarele funcţii sunt injective:

f: ***R***→***R*** , f(x) = 2x-5
g : [0,∞) → [0,∞) , g(x) = x +17
h: ***R***→***R*** , h(x) = 7x-1

3.Verificaţi dacă funcţiile f şi g sunt surjective:
f : ***R*** → (2, ∞), f (x) = 5x -12
g : ***R*** → (4, ∞), g (x) = 2x - 2

4. Arătaţi ca funcţiile f şi g sunt bijective şi determinaţi inversa:
f: ***R***→***R*** , f(x) = $\frac{x+2}{4}$
g: ***R***→***R*** , g(x) = $\frac{x+12}{2}$

Ecuaţii iraţionale

Să se rezolve ecuaţiile:

a $\sqrt{2x-1}=3$

$\sqrt[3]{x+1}=-2$

b $\sqrt[3]{x+1}=3$

$\sqrt{2x+3}=4$

c $\sqrt{2x-1}+\sqrt{2-x}=2$

$\sqrt{x^2-3x+2}=1-x$

d $\sqrt{x^2-3}=3-x^2$

$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=2$

e $\sqrt[3]{x+2}=2\sqrt[3]{x-1}$

$2\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}=3$

f. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{2x+1}=0$

$\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}+4=0$

g $\sqrt{x+5}+\sqrt{12-x}=5$

h $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{8-x}=3$

Ecuaţii exponenţiale şi logaritmice

Să se rezolve:

1. a) $5^x=125$
b) $4^x=1024$
c)$25^x=0,2$
d) $2^{x+2}=32$
e) $8^x=16$
f) $9^x=\frac{1}{243}$
g) $6^{-x}=1296$
h) $3^x=\sqrt[3]{9}$
i) $3^{2x+1}=3^{-x^2}$
j) $5^{4x-6}=25^{3x-4}$
k) $2^{x^2-6x-2,5}=16\sqrt{2}$

2. a) $5^x+5^{x+1}=750$
b) $7^x-7^{x-1}=6$
c) $3^{x-1}+3^{x-2}+3^{x-3}=13$

3) a) $5^{2x}-5^x-600=0$
b) $9^x-3^x-6=0$
c) $4^x+2^{x+1}=80$
d) $3^x+9^{x-1}-810=0$

3. a) lg x=lg 2
b) lg x=-lg 2
c) $\log_3(x^2-4x+3)=\log_3(3x+21)$
d) $\log_2(x-1)=\log_2(x^2-x-6)$
e) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+3x-4)=\log_{\frac{1}{3}}(2x+2)$
f) $\log_{x-1}(x^2-5x+7)=1$
g) $\log_x 2-\log_x 3=2$
h) $\log_x(x+3)=\log_x(x^2+1)$

4.a) $\frac{1}{12}\lg^2 x=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\lg x$
b) $\lg^2(2-x)-5\lg(2-x)=0$
c) $\lg^2 x-3\lg x+2=0$
d) $\log_3(x-2)+\log_3 x=\log_3 8$
e) $\log_2(3-x)+\log_2(1-x)=3$
f) $\log_2(2x-5)-\log_2 x=\log_2 4$
g) $\lg^2 x-4\lg x+3=0$
h) $\log_2 x-5\log_2 x+6=0$

Funcţii trigonometrice directe şi inverse

1. Să se calculeze $\sin^2 130^o + \cos^2 50^o$.
2. Să se calculeze $\cos\frac{23\pi}{12}\, sin\,\frac{\pi}{12}$.
3. Ştiind că $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, să se calculeze cos 2a.
4. Să se calculeze $\sin 135^o$.
5. Să se arate că $\sin^2 1^O + \sin^2 2^o + \ldots + \sin^2 90^o = \frac{91}{2}$.
6. Să se calculeze $\arcsin 1 + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.
7. Să se arate că $\sin(arctg\ x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
8. Să se arate că $\cos(2arctg\ x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Numere complexe

1. Să se calculeze:

$(2+3i)(i-1)(5+i)$

$\frac{1+i}{2-i} + \frac{1-i}{2+i}$.

2. Să se determine z astfel încât $z^2 = 3+4i$.

3. Dacă x_1, x_2 sunt rădăcini ale ecuației $x^2 + x + 1 = 0$, calculați $x_1^{10} + x_2^{10}$.

4. Să se calculeze $i + i^2 + \cdots + i^{14}$.

5. Fie numerele complexe:

$z_1 = 1 - i$

$z_2 = -1 + i\sqrt{3}.$

Să se scrie numerele sub formă trigonometrică și să se calculeze $z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}, (z_1)^{100}, \sqrt[3]{z_2}$.

6. Să se calculeze:

$(3-4i)(i+1)(7+i)$; $\frac{1+2i}{3-i} + \frac{1+i}{1-i}$.

7. Să se determine z astfel încât

$z^2 = -3 - 4i.$

8. Dacă x_1, x_2 sunt rădă cini ale ecuației $x^2 + x + 1 = 0$,calculați $x_1^{15} + x_2^{15}$.

9. Să se calculeze $i + i^2 + \cdots + i^{10}$.

10. Fie numerele complexe $z_1 = -1 + i$ și $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

Să se scrie numerele sub formă trigonometrică și să se calculeze $z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}, (z_1)^{100}, \sqrt[3]{z_2}$.

Elemente de combinatorică

1. Să se simplifice: a) $\frac{110!}{108!}$; b) $\frac{n!}{(n-1)!}$; c) $\frac{(n-3)!}{(n-1)!}$
2. Fie mulţimea $\{0,1,2,3,4\}$. Câte numere de 5 cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii date.
3. Să se rezolve: a) $\frac{n!}{(n-1)!}=6$; b) $\frac{(n-4)!}{(n-6)!}=210$; c) $\frac{n!}{(n-2)!}\le 72$; d) $\frac{(n+3)!}{(n+2)(n+3)}<2000$
4. Să se calculeze $P_5-C_5^3-A_6^2$; $\frac{P_4+C_5^2}{A_7^3}$
5. Să se compare numerele $a=C_5^1+C_5^4$ şi $b=C_4^0+C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4$.
6. Să se rezolve ecuaţia: $A_n^2=20$.
7. Să se determine numărul tuturor submulţimilor de 3 elemente ce se pot forma cu elemente din mulţimea $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.
8. Să se calculeze numărul submulţimilor mulţimii $\{1,2,3,4,5,6\}$, care au un număr par de elemente.
9. Se consideră 8 puncte, oricare 3 necoliniare. Câte drepte trec prin cel puţin 2 puncte din cele 8 ?
10. Să se determine câte numere de 3 cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $\{1,2,3,4,5\}$.
11. Să se calculeze $C_{2009}^3-C_{2009}^{2006}$.
12. Să se rezolve inecuaţia $A_n^3\le 8(n-1)$, $n\in N, n\ge 3$.

Elemente de teoria probabilităţilor

1. Într-o cutie sunt 3 bile albe, 4 bile negre şi 5 bile roşii. Dacă extragem o bilă la întâmplare din cutie, determinaţi:

   a) Probabilitatea de a extrage o bilă albă;

   b) Probabilitatea de a extrage o bilă roşie;

   c) Probabilitatea de a extrage o bilă neagră;

d) Probabilitatea de a extrage o bilă care nu este roşie.

2. La aruncarea unui zar, să se determine:

a)Probabilitatea de a apărea faţa cu numărul 3;

b) Probabilitatea de a apărea o faţă cu număr par.

3. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un număr natural de trei cifre, acesta să fie un pătrat perfect

4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând unul dintre numerele C_4^2, C_5^2 şi C_4^3, acesta să fie divizibil cu 3.

5. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element al mulţimii {0, 1, 2, 3, 4, 5}, acesta să verifice relaţia $n! < 75$.

6. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element al mulţimii {0, 1, 2, 3, 4, 5}, acesta să verifice relaţia $n^2 < 2^n$.

Exerciţii recapitulative – clasa a X-a

1. Să se calculeze $\log_3 27 - \log_2 8$.

2. Să se calculeze $\sqrt{14641} - 24\sqrt[3]{125} + \sqrt{2^{202}} : \sqrt[3]{2^{300}} + \sqrt[8]{256}$.

3. Să se calculeze $\log_2 5 \log_5 3 \log_3 7 \log_7 8$.

4. Să se arate că numărul $(1-i)^{24}$ este real.

5. Să se arate că, dacă z este soluţie a ecuaţiei $z^2+2z+4=0$, atunci $z^2 - 8/z=0$.

6. Să se arate că numărul $(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)^{100}$ este real.

7. Să se studieze surjectivitatea functiei $f:R\rightarrow R$, $f(x) = \begin{cases} x-3, \text{daca } x<1 \\ x+1, \text{daca } x\geq 1 \end{cases}$

8. Se consideră funcţia $f:\{-1;0;2;4\}\rightarrow\{1;2;3;4\}$, $f(-1)=4$, $f(0)=2$, $f(2)=1$, $f(4)=3$. Să se determine f^{-1}.

9. Să se calculeze modulul numărului complex $z=(3+4i)^4$.

10. Să se calculeze $C_7^5 - C_5^6 + C_6^4$.

11. Să se arate ca funcţia f :[-12 ;4]→[-3 ;1], $f(x) = 1 - \sqrt{4 - x}$ este inversabilă şi să se afle inversa ei.

Clasa a XII-a

Mulţimi de numere

1. Să se calculeze $\sqrt{14641} - 24\sqrt[3]{125} + \sqrt{2^{202}} : \sqrt[3]{2^{300}}$.
2. Să se raţionalizeze numitorul $\frac{10}{\sqrt{7}}$.
3. Scrieţi ca putere cu exponent raţional numerele $a = \sqrt[8]{5}$, $b = \frac{1}{3\sqrt{7}}$.
4. Să se arate că numerele 1, $\log_3 9$, $\sqrt[3]{64}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
5. Să se determine valorile reale ale lui x pentru care expresia $E(x) = \sqrt{2-3x}$ este bine definită.
6. Să se raţionalizeze numitorul $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$.
7. Să se ordoneze crescător numerele $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$, 15 şi $\sqrt[8]{64}$.
8. Să se arate că numărul $\sqrt[3]{64}^{\log_2 64}$ este număr natural.
9. Să se ordoneze crescător numerele $a = 3^{1/2}$, $b = 4^{1/3}$, $c = 5^{1/4}$.

Funcţii

1. Fie funcţiile $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = nx^2 + 3(n-2)x + n+1$, cu n parametru real. Aflaţi mulţimea valorilor lui n pentru care ecuaţia $f_n(x) = 0$ are cel puţin o soluţie reală.
2. Se dă funcţia f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - (n-2)x + 2n-4$, cu n parametru real.

a) Determinaţi mulţimea valorilor lui n pentru care funcţia se anulează în (0 , 1) şi $f(x) \geq 0$;

b) Determinaţi mulţimea valorilor lui n pentru care $f(x) \leq 0$, $\forall\, x \in (0,1)$.

3. Fie x_1 şi x_2 rădăcinile reale ale ecuaţiei $2x^2 + 2mx - m(m-2)=0$, cu m parametru real.

   a) Precizaţi intervalul pe care se află suma rădăcinilor x_1 şi x_2;

   b) Precizaţi intervalul pe care se află suma pătratelor rădăcinilor x_1 şi x_2;

   c) Precizaţi intervalul pe care se află produsul rădăcinilor x_1 şi x_2

4. Fie funcţiile f_n : **R** →**R**, $f_n(x) = x^2 - (4n+2)x + n+1$, cu n parametru real. Determinaţi poziţia punctului din plan prin care trec toate graficele funcţiilor f_n.

5. Considerăm funcţia f: **R**→ **R**, f(x) = 3x + 11. Determinaţi a ∈ **R** pentru care f(a) + 3 =f(5).

6. Fie funcţia f : **R**→ **R**, f(x) = - 5x + 3. Calculaţi valoarea expresiei E = f(-4) - f(-3) – f(-2) + f(-1)

7. Fie funcţia f : **R**→ **R**, f(x) = 6x + 3. Demonstrață că $f(\sqrt{2}) < f(\sqrt{3})$.

8. Determinaţi coordonatele punctelor de intersectie ale graficului funcţiei f: **R**→ **R** , f(x)= 6x – 12 cu axele de coordonate.

9. Fie funcţia f: **R**→ **R**, f(x) = 2x + 2013. Demonstraţi că $\frac{f(u)-f(5)}{u-5} \in$ **N**, pentru orice u ∈ **R**, u≠5.

10. Determinaţi toate numerele reale x pentru care funcţia f: **R**→ **R**, f(x) = x + 3 verifică inegalitatea $2f(x)+f(2) \geq 4f(1)$.

Şiruri. Progresii aritmetice şi progresii geometrice

1. a) Să se afle primul termen şi raţia unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ dacă $a_5 = 42$ şi $a_{11} = 90$.

b) Să se afle primul termen şi raţia unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ dacă $b_3 = 9$ şi $b_6 = 243$.

c) Să se afle primul termen şi raţia unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ dacă $a_5 = 90$ şi $a_{11} = 42$

d) Să se afle primul termen şi raţia unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ dacă $b_3 = 243$ şi $b_6 = 9$

2. Să se determine x astfel încât numerele $x+4$, x^2+1, $2x+7$ să fie termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

3. Calculaţi sumele:

a) $2+5+8+11+...+2015=$

b) $1+4+7+10+...+2014=$

c) $1-5+5^2-5^3+...-5^{2015}=$

d) $5-5^2+5^3-5^4+5^5-...+5^{2015}=$

4. Determinaţi numărul natural x din egalitatea: $2+7+12+...+x=1550$

5. Determinați rația progresiei geometrice $\left(b_n\right)_{n\geq 1}$ cu termeni reali, știind că $b_1 = 1$ și $b_4 = 27$.

6. Calculați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ știind că $a_1 = 6$ și $a_2 = 12$.

7. Determinați primul termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_5 = 48$ și $b_8 = 384$.

8. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu rația $r = -2$ și $a_1 = 19$. Calculați a_7.

9. Determinați numărul real x știind că numerele 7, 3x și $x^2 + 2$ sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

10. Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_4 = 7$ și $a_9 = 22$. Calculați a_{14}.

Metode de numărare

1. Aflaţi câte numere de trei cifre au suma cifrelor egală cu 3 .
2. Câte numere cu trei cifre diferite se pot forma cu cifrele $0,1,2,3,4,5$?
3. Dacă A este o mulţime cu 5 elemente, determinaţi numărul funcţiilor $f : A\times A \to A$.
4. Determinaţi numărul funcţiilor strict monotone $f : \{1,2,3,4\} \to \{3,4,5,6,7,8\}$.
5. Câte mulţimi X verifică egalitatea $\{1,2,3\} \cup X = \{1,2,3,4,5\}$?
6. Fie $A = \{x \in N^*; x \le 500, x \vdots 4\}$ şi $B = \{y \in N^*; y \le 500, y \vdots 5\}$. Determinaţi cardinalul mulţimii $A \cup B$.
7. Aflaţi ce tip de poligon are număr egal de laturi şi diagonale .
8. Se consideră dreptele paralele d_1 şi d_2 . Fie punctele A, B, C, D $\in d_1$ şi D, E, F, G $\in d_2$. Determinaţi numărul de triunghiuri format de aceste puncte.

Vectori

1. În triunghiul ABC să se calculeze $5\vec{AB} + 4\vec{BC} + 3\vec{CA}$.
2. Se consideră triunghiul ABC , iar $\vec{BC} = 3\vec{CD}$. Să se exprime $\overline{AC}$ în funcţie de $\vec{AB}$ şi $\vec{AD}$.
3. Se consideră triunghiul ABC , iar $\vec{AM} = 3\vec{MB}$, $\vec{AN} = 4\vec{NB}$. Să se exprime $\vec{MN}$ în funcţie de $\vec{AB}$ şi $\vec{AC}$.

4. Fie triunghiul ABC în care D este mijlocul laturii (AC), iar E este mijlocul medianei (BD). Dacă $EF \parallel BC$, $F \in BC$, să se exprime $\vec{BF}$ în funcţie de $\vec{BC}$.

5. Fie triunghiul ABC, în care $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=\vec{0}$. Să se determine punctul M cu această proprietate.

6. Fie $AB \perp BC$, $BC \perp CD$, unde $\vec{AB}$ şi $\vec{CD}$ au acelaşi sens, iar $AB=7$, $BC=2$, $CD=3$. Determinaţi modulul vectorului $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}$.

7. Fie triunghiul ABC, cu M mijlocul segmentului [BC] si G centru de greutate al triunghiului ABC.
   a) Arătaţi că $\vec{AM}=\frac{1}{2}\left(\vec{AB}+\vec{AC}\right)$
   b) Arătaţi că $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$
   c) Arătaţi că pentru orice punct O din plan are loc egalitatea $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=3\vec{OG}$.

8. Să se determine m astfel încât vectorii $\vec{u}=(m-2)\vec{i}+3\vec{j}$ și $\vec{v}=5\vec{i}+3\vec{j}$ să fie egali.

9. Fie punctele $A(x_A,y_A)$ și $B(x_B,y_B)$. Să se determine numerele reale a și b astfel încât $\overrightarrow{AB}=a\vec{i}+b\vec{j}$.

10. Să se determine m astfel încât vectorii $\vec{u}=(m-2)\vec{i}-3\vec{j}$ și $\vec{v}=5\vec{i}+3\vec{j}$ să fie opuși.

Numere complexe

1. Să se calculeze: $(2+3i)(i-1)(5+i)$; $\frac{1+i}{2-i}+\frac{1-i}{2+i}$.

2. Să se determine z astfel încât $z^2=3+4i$.

3. Dacă x_1, x_2 sunt rădăcini ale ecuaţiei $x^2+x+1=0$, calculaţi $x_1^{10}+x_2^{10}$.

4. Să se calculeze $i + i^2 + \cdots + i^{14}$.

5. Fie numerele complexe: $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$. Să se scrie numerele sub formă trigonometrică şi să se calculeze $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $(z_1)^{100}$, $\sqrt[8]{z_2}$.

6. Să se determine suma a două numere complexe.

7. Să se determine diferența numerelor complexe z= 2 – 5i şi z_1=6-3i.
8. Să se determine produsul numerelor complexe z= 2 + 5i şi z_1=6+3i.
9. Să se determine modulul numărului complex z= 2 – 5i.
10. Să se determine conjugatul numărului complex z= 2 – 5i.

Matrice

1.Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(R)$.

Calculaţi:
a) $A^2 + A$
b) A^n
c) $B = A + A^2 + ... + A^n$

2.Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(R)$.

a) Calculaţi A^2

b) Să se arate ca $A^3 = 4A^2 - 5A + 2I_3$

3. Să se determine matricele $A \in M_2(R)$ ştiind că $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Să se determine matricele $A, B \in M_2(R)$ ştiind că

$A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ si $2A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Determinanţi

1. Să se calculeze determinanţii

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -8 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 8 & 6 & 3 \\ 9 & 7 & 4 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ ab & bc & ca \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \end{vmatrix}$$

2. Rezolvaţi ecuaţiile: $\begin{vmatrix} 3x & x+2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 0$ şi $\begin{vmatrix} 3 & -x & 1 \\ -x & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -x \end{vmatrix} = 0$

3. Se dau punctele A (7;2), B (5;3), C (3;4) D (3;1). Se cere:
   a) Să se arate că punctele A, B, C sunt coliniare.
   b) Să se calculeze aria triunghiului ABD.
   c) Să se scrie ecuaţia dreptei AB.

4.Să se determine m $\in$R pentru care punctele A (m,m+2), B (m, 3), C (1,3) sunt coliniare.

Sisteme de ecuaţii liniare

1. Rezolvaţi sistemele

a) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y+z=2 \\ 3x+y+2z=3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x+y+z=2 \\ x+3y+2z=-1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} mx+y+z=0 \\ x+3y+2z=0, \quad m \in R \setminus \left\{\frac{2}{7}\right\}. \\ -x-y+4z=0 \end{cases}$

2. Arătaţi că sistemul $\begin{cases} ax+y+z=4 \\ x+2y+3z=6 \\ 3x-y-2z=-2 \end{cases}$ admite o soluţie cu toate componentele numere întregi , $\forall a \in Z$.

3. Rezolvaţi şi discutaţi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+y+z=m \\ x+(1+m)y+z=2m \\ x+y+(1+m)z=0 \end{cases}$, unde $m \in R$.

Funcţii continue

1. Să se studieze continuitatea funcţiei f:R→R, definită prin $f(x)=\begin{cases} x^2-x, & x>1 \\ -x^2+x, & x\le 1 \end{cases}$ în punctul $x_o=1$.
2. Să se studieze continuitatea funcţiei f:R→R, definită prin $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+3}{x+2}, & x\ge 0 \\ x+\dfrac{3}{2}, & x<0 \end{cases}$ pe mulţimea numerelor reale.
3. Să se determine numărul real *a* astfel încât funcţia f:R→R, definită prin $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+3}{x^2+1}, & x\le 1 \\ \dfrac{2x+a}{x^2+2}, & x>1 \end{cases}$ să fie continuă în punctul $x_o=1$.
4. Să se determine semnul funcţiei f:R→R, definită prin f(x)=(x–1)(3^x-2^x).
5. Să se rezolve inecuaţia (x–2)(3^x-3)>0.

Limite de funcţii

Să se calculeze următoarele limite:

I. a) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x^2-16}$ b) $\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-3x-9}{x^3-27}$

c) $\lim_{x\to 10}\frac{\sin(x^2-100)}{2x-20}$ d) $\lim_{x\to 0}\frac{2^x+3^x+4^x+5^x-4}{x}$

e) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2007x)}{x^2+9x}$ f) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+2}}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{x+8}}$

II.

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x+5}{4x^2+x+1}$ b) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+6x+5}{2x+4}$

c) $\lim_{x\to\infty}\frac{10x+8}{x^2+x+9}$ d) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+3x+1}+\sqrt{x^2+x+1}}{x+5}$

e) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+15x+7}-\sqrt{9x^2+3x-5}\right)$

f) Să se determine constantele reale a şi b pentru care

$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+2}-ax-b\right)=\frac{15}{4}$

g) Să se determine constantele reale a şi b pentru care

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+10x+7}{x+5}-ax-b\right)=12$

Funcţii derivabile

SUBIECTUL I (30 p) – alegeţi răspunsul corect

5p **a)** $f(x)=x^2-x \Rightarrow f'(x)=?$

A) $2x+1$ **B)** $2x$ **C)** $2x-1$

5p **b)** $f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=?$

A) $-\frac{1}{x^2}$ **B)** $\frac{1}{x^2}$ **C)** $-\frac{1}{x}$

5p **c)** $f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=?$

A) $-\sin x$ **B)** $\cos x$ **C)** $-\cos x$

5p **d)** $f(x)=(2x^2+3)\cos x \Rightarrow f'(x)=?$

A) $4x\cos x-(2x^2+3)\sin x$ **B)** $4x\cos x+(2x^2+3)\sin x$ **C)** $-4x\sin x$

5p **e)** $f(x)=\frac{x+1}{x-1} \Rightarrow f'(x)=?$

A) $\frac{2}{(x-1)^2}$ **B)** $\frac{2x}{(x-1)^2}$ **C)** $\frac{-2}{(x-1)^2}$

5p **f)** $f(x)=\sqrt[3]{x^2-x} \Rightarrow f'(x)=?$

A) $\frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2-x)^2}}$ **B)** $\frac{2x-1}{3\sqrt[3]{(x^2-x)^2}}$ **C)** $\frac{2x-1}{3\sqrt[3]{x^2-x}}$

SUBIECTUL II (20 p) – scrieţi rezolvările complete

Fie $f:(0;+\infty)\to R$, $f(x)=\begin{cases}\ln^3 x & ,0<x\le e\\ \alpha x+\beta & ,x>e\end{cases}$

5p **a)** Calculaţi $l_s(e)$ şi $l_d(e)$;

5p **b)** Descompuneţi $\ln^3 x-1$ folosind formula $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$;

5p **c)** Calculaţi $\lim_{x\nearrow e}\frac{\ln x-\ln e}{x-e}$;

5p d) Determinaţi parametrii reali α şi β astfel încât f să fie derivabilă .

e)

SUBIECTUL III (20 p) – scrieţi rezolvările complete

Fie $f:(0;+\infty)\to R$, $f(x)=x\ln x$

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$;

5p **b)** Calculaţi $f''(x)$;

5p | **c)** Dacă $g:(0;+\infty)\to R$, $g(x)=\ln x$ determinaţi $g^{(n)}(x)$;
5p | **d)** Determinaţi $f^{(n)}(x)$.

Rolul derivatelor in studiul funcţiilor

1. Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei $f:(0,\infty)\to R$, f(x) = x lnx.

2. Determinaţi coordonatele punctelor de extrem ale funcţiei f:R→R, f(x) = $(x^2 - 3)e^x$.

3. Demonstraţi ca funcţia f:R→R, $f(x)=\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{3}+x^2+1$ este convexă.

4. Determinaţi coordonatele punctului de inflexiune al graficului funcţiei f : $(0,\infty)\to R, f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$,

5. Demonstraţi ca funcţia f:R→R, f(x)= arctg x verifică relaţia f(3ln2) < f(2ln3)

6. Fie f:[1, 3] → [2, 6 + ln3], f(x) = 2x + ln x. Demonstraţi ca funcţia este bijectivă.

Structuri algebrice. Morfisme. Polinoame

1. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie" *" dată prin:

x *y=2xy-x-y+4.

a) să se arate ca legea este asociativă
b) să se determine elementul neutru al legii de compozitie
c) să se rezolve ecuaţia x*2x=-1
d) să se determine x astfel încât x*2=3
e) să se calculeze (-1) *0*1

2. a) Alcătuiţi tabla adunării şi înmulţirii modulo 5
   b) Calculaţi produsul elementelor mulţimii Z4

c) Rezolvaţi în Z6 ecuaţiile: $x^2=3$ şi $2x=4$

3. Definim legea de compoziție $x * y = xy - 6x - 6y + 42, \forall\ x, y \in \mathbb{R} \setminus \{6\}$.

Să se arate că $(\mathbb{R} \setminus \{6\}, *)$ este grup abelian .

4. Se consideră matricele în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$A = \begin{pmatrix} 6 & -10 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $G = \{X(a) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / X(a) = I_2 + aA, \text{unde } a \in \mathbb{R}^*\}$

.

a) Să se verifice că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + ab)$, oricare ar fi numerele $a, b \in \mathbb{R}^*$;

b) Să se demonstreze că G împreună cu operaţia de înmulţire a matricelor formează grup abelian.

3. Se consideră mulțimea:

$G = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 2b^2 = 1\right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

a) Să se verifice că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ şi $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin G$;

b) Să se demonstreze că G împreună cu operaţia de înmulţire a matricelor formează grup abelian.

4. Demonstraţi că mulţimea G=$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}, a, b \in R\right\}$ formează o structură de grup comutativ în raport cu operaţia de adunare a matricelor.

5. Considerăm polinoamele f= $X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 2X + 4$ şi g= $X^2 - 2X + 1$. Fie r polinomul reprezentat de restul împărţirii lui f la g. Demonstraţi că f (1) = r(1).

Primitive

1. Să se calculeze următoarele primitive:

a) $\int\left(14x^6-15x^4+12x^3-4x+7\right)dx$

b) $\int\frac{\sqrt{x^2+7}+x-1}{x^2+7}dx$

c) $\int\frac{x\ln\left(x+\sqrt{x^2+11}\right)}{\sqrt{x^2+11}}dx$

d) $\int\frac{1}{\left(x^2+4\right)^2}dx$

2. Se consideră funcțiile $f,F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\frac{x^3-3x+2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}, F(x)=\frac{x^2+2x+5}{\sqrt{x^2+1}}$.

Să se demonstreze că funcția F este o primitivă a funcției f și să se calculeze $\int\frac{e^x\cdot F(x)-e^x\cdot f(x)}{(F(x))^2}dx$.

3. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\begin{cases}(3x+1)e^{3x}, x\in(-\infty,0)\\ e^x\cos x, x\in[0,\infty)\end{cases}$.

Să se demonstreze că funcția f admite primitive pe $\mathbf{R}$ și să se determine o primitivă F care verifică relația $F(0)=\frac{1}{2}$.

Integrala definită

1. Se consideră funcţia $f:R\to R,\quad f(x)=x(1-x)$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

b) Să se demonstreze că funcţia f admite primitive pe R.

2. Fie funcţia $f:[0,1]\to R,\ f(x)=\frac{1}{1+x^4}$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.

b) Să se arate că $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^1 f(x)dx \leq 1$

Modele de subiecte de bacalaureat

A.

1) Rezolvaţi sistemul: $\begin{cases} x-2y+z+t=1 \\ x-2y+z-t=-1 \\ x-2y+z+5t=5 \end{cases}$

2) Fie f:D→R, f(x)=$\frac{3x^3+1}{x(x+2)}$

a)D=? Determinaţi asimptotele la graficul functiei.

b) Determinaţi ecuaţia tangentei la grafic în punctul de abscisă $x_0=1$

3) Determinaţi constantele a si b, astfel încât f:R → R, f(x)= $\begin{cases} x^2+a, \ x \leq 2 \\ ax+b, x > 2 \end{cases}$ să fie continuă pe R şi în plus, să existe $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

4) Calculaţi derivatele funcţiilor:

a) f(x)=$e^{5x}(\sin 3x+1)$

b) f(x)=ln(x^2-3)+$\sqrt[3]{x-3}$

5) Determinaţi numărul de rădăcini reale ale ecuaţiei:

$x^4+2x^2-8x+2=0$

6) Să se determine a şi b astfel încât funcţia f:[1,5] → R, f(x)=$\begin{cases} \ln x, x \in [1,e] \\ ax+b, x \in (e,5] \end{cases}$ să verifice condiţiile teoremei lui Lagrange pe [1,5]. Cu valorile a şi b determinate, determinaţi constanta c∈(a,b).

B.

SUBIECTUL I

1) Se consideră numărul complex $z = \frac{2+i}{1+2i}$, $\bar{z}$ conjugatul său. Arătați că $z + \bar{z} = \frac{8}{5}$;

2) Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 5, g(x) = mx + 1, m \in \mathbb{R}$; Determinați valorile parametrului real m pentru care graficele asociate celor două funcții nu se intersectează;

3) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2 - 1) = 2 + \log_2(x - 1)$;

4) Calculați probabilitatea ca , alegând un număr de 3 cifre, cu cifrele din mulțimea $A = \{0, 2, 3, 4, 5, 6\}$, acestea să aibă toate cifrele pare .

5) Scrieți ecuația medianei din A în triunghiul ABC; $A(-2,4)$, $B(2,-2)$, $C(1,6)$ în reperul xOy.

6) Rezolvați în intervalul $[0, \pi]$, ecuația $sinx + cos2x = 0$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a)Determinaţi x astfel încât $\det(A - xI_3) = 0$;

b) Demonstraţi că dacă $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ şi $AX = XA$ atunci $\exists a, b, c \in \mathbb{C}$, a.î. $X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$;

c)Determinaţi numărul de soluţii ale ecuaţiei $X^3 = A$ în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ şi în $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

2. Se consideră polinomul
$f = 3X^3 - mX^2 + mX - 3$ *cu rădăcinile* x_1, x_2, x_3;

a)Calculați $f(1)$;

b) Determinaţi *m* real , pentru care polinomul considerat are o singură rădăcină reală;

c)Determinaţi *m* pentru care $|x_1| + |x_2| + |x_3| = 3$.

<u>SUBIECTUL III</u>

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = arctgx$;

a) Aflați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției considerate .

b) Arătați că derivata f' a funcției considerate este descrescătoare pentru $x \geq 0$.

c) Demonstrați că $\frac{1}{1+(k+1)^2} < f(k+1) - f(k) < \frac{1}{1+k^2}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq1}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+x+1} dx$;

a) Calculați $I_1 + I_2 + I_3$.

b) Calculați $\lim_{n\to\infty} I_n$.

C.

SUBIECTUL I.

1. Calculaţi valoarea expresiei E=[$\log_2 3 + \log_3 2$] , unde [x] reprezintă partea întreagă a lui x .
2. Rezolvaţi ecuaţia f(x)+f(2x)=5 ştiind că funcţia f:R->R , f(x)=3x-2.
3. Calculaţi max(f(x),g(x)) ştiind că x este soluţia naturală a ecuaţiei

$$3^{2x^2-3x+1} = 1$$

iar f, g:R->R , f(x)= $\sqrt{x^2+1}$, g(x)=2x .

4. Scrieţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A(2,3) şi face cu axa Ox un unghi de 30°.
5. Calculaţi sin(a+b) ştiind că a,b $\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$,sina= $-\frac{1}{2}$, cosb= $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

SUBIECTUL II.

1. Fie A,B $\in M_3(R)$, A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a. Stabiliţi dacă matricea A este inversabilă .
b. Rezolvaţi ecuaţia : AX=B , X $\in M_3(R)$.
c. Calculaţi $A^2 + trB(I_3 + B)$.

2. Fie polinomul f $\in$ C[X] , f= $X^4 + X^3 + \sqrt{3}X + 2$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4.

a. Calculaţi $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.
b. Arătaţi că cel puţin o rădăcină a polinomului este număr complex .
c. Calculaţi restul împărţirii polinomului f la polinomul g $\in$ C[X] , g=X-2 .

SUBIECTUL III.

1. Fie funcţia f :R->R , f(x)=arctg x .

a. Calculaţi $f'(x)$.
b. Calculaţi $\lim_{n->\infty}(1 + f'(n))^n$.
c. Scrieţi ecuaţiile asimptotelor graficului funcţiei f.

2 . Fie şirul $I_n = \int_1^2 x^n \ln x dx$, n $\in$ N.

a. Calculaţi $I_0 + I_1$.
b. Calculaţi I_n.
c. Arătaţi că $I_n \geq 0$, n $\in$ N .

Subiecte propuse la examenele de bacalaureat

Ministerul Educației și Cercetării
Centrul Național de Politici și Evaluare în Educație

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p 1. Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq1}$ cu $a_1=2$ și rația $r=3$. Calculați a_3.

5p 2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Determinați numerele reale x pentru care $f(x^2)=9$.

5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x+2}-3^{2x}=8$.

5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să fie divizor al lui 100.

5p 5. Se consideră un punct P în planul paralelogramului $ABCD$. Arătați că $\overline{PA}+\overline{PC}=\overline{PB}+\overline{PD}$.

5p 6. Arătați că $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}12+a & a\\ 1+a & 3+a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p a) Arătați că $\det(A(0))=36$.

5p b) Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a)-(12+a)I_2)=0$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

5p c) Se consideră matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $X\cdot X=A(0)$. Arătați că cel puțin un element al matricei X este număr irațional.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x+\sqrt[3]{y}-2$.

5p a) Arătați că $1\circ1=0$.

5p b) Determinați numărul real a pentru care $x\circ a=x$, pentru orice număr real x.

5p c) Determinați numerele reale x pentru care $x\circ x^6=4$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2\sqrt{x^2-1}$.

5p a) Arătați că $f'(x)=2x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$, $x\in(1,+\infty)$.

5p b) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-f(x)}{x}$.

5p c) Demonstrați că axa Ox este tangentă la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+2x+2}$.

5p a) Arătați că $\int_0^1(x^2+2x+2)f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

5p b) Arătați că $\int_0^2\left(f(x)+\frac{1}{x^2+2x+2}\right)dx=\frac{1}{2}\ln5$.

5p c) Arătați că $\int_1^e\left(\frac{1}{f(x)}-2\right)\ln x\,dx=\frac{e^2+5}{4}$.

Probă scrisă la matematică *M_şt-nat* Varianta 6
Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii
Pagina 1 din 1

Ministerul Educației și Cercetării
Centrul Național de Politici și Evaluare în Educație

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p 1. Determinați primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$, știind că $a_2=3$ și $a_3=5$.

5p 2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$. Determinați numărul natural n pentru care $f(n)=3$.

5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-9}=x-1$.

5p 4. Determinați numărul de submulțimi cu trei elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4\}$.

5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1,1)$, $N(3,3)$, $P(4,3)$ și $Q(1,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, pentru care patrulaterul $MNPQ$ este trapez cu bazele MN și PQ.

5p 6. Calculați lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC, în care $AB=5$ și $\cos B=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p a) Arătați că $\det(A\cdot A)=a^2b^2$, pentru orice numere reale a și b.

5p b) Se consideră matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A\cdot X=X\cdot A$. Demonstrați că, dacă a și b sunt numere reale distincte, atunci există numerele reale x și t astfel încât $X=\begin{pmatrix} x & 0\\ 0 & t\end{pmatrix}$.

5p c) Pentru $a=4$ și $b=0$, determinați matricele $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $Y\cdot Y=A$.

2. Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=x\sqrt{y+1}+y\sqrt{x+1}$.

5p a) Arătați că $3*3=12$.

5p b) Demonstrați că $x*0=0*x=x$, pentru orice $x\in M$.

5p c) Determinați $x\in M$ pentru care $(x^2+2x)*3=7$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x+1)$.

5p a) Arătați că $f'(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p b) Arătați că funcția f este convexă.

5p c) Se consideră funcția $g:(-1,0]\to\mathbb{R}$, $g(x)=(x+1)^x$. Demonstrați că, dacă $x_1,x_2\in(-1,0]$ astfel încât $x_1\le x_2$, atunci $g(x_1)\ge g(x_2)$.

2. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-x^3$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{3}{4}$.

5p b) Arătați că $\int_0^1 x^2\left(f(x)\right)^3dx=\frac{1}{12}$.

5p c) Demonstrați că $\int_0^1 \left(f(x)\right)^{n+1}dx\le\int_0^1\left(f(x)\right)^n dx$, pentru orice număr natural nenul n.

Ministerul Educației și Cercetării
Centrul Național de Politici și Evaluare în Educație

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p 1. Arătați că $\log_2 7 + \log_2 6 - \log_2 21 = 1$.

5p 2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-1$. Demonstrați că $f(x)\ge g(x)$, pentru orice număr real x.

5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+12}=2x$.

5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr x din mulțimea $A=\{-2,-1,0,1,2\}$, acesta să fie soluție a ecuației $x^2-3x+2=0$.

5p 5. Determinați numerele reale a și b, pentru care $\vec{u}=3\vec{v}$, unde $\vec{u}=a\vec{i}+6\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}+b\vec{j}$.

5p 6. Se consideră expresia $E(x)=\sin^2 x-\cos^2 x+\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-2$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x+2 & x+3 \\ x-3 & x-2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p a) Arătați că $\det(A(x))=5$, pentru orice număr real x.

5p b) Determinați numărul natural n astfel încât $A(-3)+A(-2)+A(-1)+A(1)+A(2)+A(3)=nA(0)$.

5p c) Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1)=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=\dfrac{x+y+1}{x^2+y^2+1}$.

5p a) Arătați că $0*1=1$.

5p b) Determinați numerele reale x pentru care $x*x=1$.

5p c) Demonstrați că $x*(-x)\le 1$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x^2+2x+2}$.

5p a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{2x^2+3x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p b) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

5p c) Demonstrați că, pentru orice număr real a, ecuația $f(x)=a$ are cel puțin o soluție.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x+x$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 \left(f(x)-xe^x\right)dx=\dfrac{1}{2}$.

5p b) Arătați că $\int_1^2 \dfrac{1}{x}\cdot f\left(x^2\right)dx=\dfrac{e^4-e+3}{2}$.

5p c) Se consideră $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcției f pentru care $F(1)=0$. Arătați că $\int_0^1 F(x)\,dx=\dfrac{5-3e}{3}$.

Ministerul Educației
Centrul Național de Politici și Evaluare în Educație

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p 1. Determinați al treilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq1}$, știind că $b_1=2$ și $b_2=6$.

5p 2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+7$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-7$. Calculați $(f\circ g)(7)$.

5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x-1}=x-2$.

5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)>0$.

5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(-1,0)$, $C(3,5)$ și $D(5,6)$. Demonstrați că punctele B, D și mijlocul segmentului AC sunt coliniare.

5p 6. Determinați $x\in(0,\pi)$, știind că $(\sin x-\cos x)^2=2$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1+2^a&2^a\\-2^a&1-2^a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p a) Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p b) Arătați că $A(1)+A(2)-A(1)\cdot A(2)=I_2$.

5p c) Se consideră numerele naturale m și n, astfel încât $A(m)\cdot A(n)=A(m+n)$. Arătați că $m=n=1$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x^2+y^2+x+y$.

5p a) Arătați că $(-1)*(-1)=0$.

5p b) Demonstrați că $x*y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y.

5p c) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $x^2*x^2\leq4$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x-\frac{1}{2}\ln(x+2)$.

5p a) Arătați că $f'(x)=\frac{(2x+3)(2x+5)}{2(x+2)}$, $x\in(-2,+\infty)$.

5p b) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x-f(x)}{x}$.

5p c) Demonstrați că $x^2+4x+\frac{15}{4}\geq\frac{1}{2}\ln(2x+4)$, pentru orice $x\in(-2,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\frac{2}{x^2+1}$.

5p a) Arătați că $\int_0^3(x^2+1)f(x)dx=18$.

5p b) Arătați că $\int_1^3 xf(x)dx=4+\ln5$.

5p c) Demonstrați că $F(x+1)\geq F(x)+1$, pentru orice număr real x, unde F este o primitivă a lui f.

Ministerul Educației
Centrul Național de Politici și Evaluare în Educație

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p 1. Determinați termenul b_4 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_5 = 6$ și $b_6 = 18$.

5p 2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+x-4$. Determinați numerele reale m, știind că $f(m)=m$.

5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $100\cdot 10^{2x}=10^{3x}$.

5p 4. Determinați câte numere naturale pare, de două cifre, se pot forma cu cifre din mulțimea $\{0,1,2,3,4\}$.

5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,0)$, $B(4,0)$ și $C(0,4)$. Determinați coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

5p 6. Arătați că $\sin 2x = 1$, știind că $\operatorname{tg} x = 1$ și $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x+2 & 3 \\ -1 & x-2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p a) Arătați că $\det(A(0))=-1$.

5p b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care matricea $A(x)$ este inversabilă.

5p c) Se consideră numerele reale a, b și c, astfel încât $A(a)\cdot A(b)=A(c)$. Demonstrați că $a^2+b^2+2c=3$.

2. Pe mulțimea $M=[-1,1]$ se definește legea de compoziție $x\circ y = x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$.

5p a) Arătați că $0\circ 1 = 1$.

5p b) Determinați $x\in M$ pentru care $x\circ x = 0$.

5p c) Demonstrați că $x\circ\sqrt{1-x^2}=1$, pentru orice $x\in[0,1]$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x\ln x-1$.

5p a) Arătați că $f'(x)=e^x+\ln x+1$, $x\in(0,+\infty)$.

5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p c) Demonstrați că $e^x + x\ln x \geq \sqrt{e}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$, pentru orice $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2}+\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+2}\,dx=\frac{17}{6}$.

5p b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p c) Se consideră funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$. Determinați $a\in(0,+\infty)$ pentru care $\int_0^1 g(x)\,dx=\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln\frac{a+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Probă scrisă la matematică *M_şt-nat* Varianta 1
Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii
Pagina 1 din 1

Ministerul Educației
Centrul Național de Politici și Evaluare în Educație

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $3(4-i)+3i(1+i)=9$, unde $i^2=-1$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4$. Calculați $(f\circ f)(2)$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(x^2-2x+4\right)=1$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$ și $B(3,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că punctele O, A și B sunt coliniare.
5p	**6.** Se consideră $E(x)=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(x,y)=\begin{pmatrix}x+3y&4y\\-2y&x-3y\end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1,1))=0$.
5p	**b)** Demonstrați că, dacă matricea $A(x,y)$ este inversabilă, atunci $\lvert x\rvert\neq\lvert y\rvert$.
5p	**c)** Determinați perechile (m,n), de numere întregi, pentru care $A(m,n)\cdot A(-m,n)=I_2$.
	2. Pe mulțimea $A=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=4^{xy}-(1-x-y)$.
5p	**a)** Arătați că $2\circ 0=2$.
5p	**b)** Arătați că $x\circ\frac{1}{x}\geq 5$, pentru orice $x\in A$, $x\neq 0$.
5p	**c)** Demonstrați că, dacă m și n sunt numere naturale impare, atunci $m\circ n$ este număr natural impar.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{3(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $x^3\geq 3\ln x+1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^2\frac{f(x)}{e^x}dx=2$.
5p	**b)** Arătați că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)+e^x\right)dx=\frac{e^2+1}{e}$.
5p	**c)** Demonstrați că $\int_{-1-a}^{-1+a}f(x)dx\geq-\frac{2a}{e}$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.

Probă scrisă la matematică *M_şt-nat* Varianta 4
Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii
Pagina 1 din 1

Bibliografie

1. OMECI 3410 / 2009, anexa 1: Plan cadru de învăţământ pentru ciclul inferior al liceului, filiera teoretică, profil real, specializările matematică – informatică, ştiinţe ale naturii
2. OMEC 4598/2004, anexa 2: Programe şcolare pentru clasa a X-a, ciclul inferior al liceului, matematică
3. OMECI 3410 / 2009, anexa 1: Plan cadru de învăţământ pentru ciclul superior al liceului, filiera teoretică, profil real, specializarea ştiinţe ale naturii
4. OMEC 32528/2006, anexa 2: Matematică programa 2, filiera teoretică, profil real, specializarea ştiinţe ale naturii, 3 ore / săpt. (TC+CD)
5. OMECTS 4799/2011, anexa 2: Metodologia de organizare şi desfăşurare a examenului de bacalaureat – 2011
6. OME 5151/2021 privind organizarea şi desfăşurarea examenului naţional de bacalaureat – 2022
7. OME 3237/2021, anexa 2: Examenul naţional de bacalaureat 2021, programe pentru susţinerea probelor scrise, programa M_şt-nat., filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii
8. Marius Burtea, Georgeta Burtea, Matematică, manual pentru clasa a X-a, trunchi comun + curriculum diferenţiat, aprobat prin OMEC 3787/2005, Editura Carminis, 2005
9. Marius Burtea, Georgeta Burtea, Matematică, manual pentru clasa a XII-a M_2, filiera teoretică, profil real, specializarea ştiinţe ale naturii, trunchi comun + curriculum diferenţiat, aprobat prin OMEC 1262/2007, Editura Carminis, 2007
10. Camelia Maria Magdaş şi colab., Ghid de pregătire Bacalaureat 2016, Matematică M_mate-info, Editura Delfin, 2015
11. Ion Bucur Popescu, Matematică M_2, Subiecte rezolvate, bac 2014, Editura Carminis, 2015

12. Adrian Zanoschi şi colab., Bacalaureat 2020, Matematică M_mate-info: teme recapitulative, Editura Paralela 45, 2019
13. Marian Andronache şi colab., Matematică pentru examenul de bacalaureat, Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii, Clubul Matematicienilor, 2015
14. Examenul naţional de bacalaureat, Subiecte şi bareme, 2016 – 2021, sesiunea specială, sesiunea iunie – iulie, sesiunea august – septembrie, Matematică M_şt.-nat.
15. Simularea examenului naţional de bacalaureat, ISJ Iaşi, 2018 – 2021, subiecte şi bareme Matematică M_şt.-nat.
16. Simularea examenului naţional de bacalaureat, ME, 2018 – 2021, subiecte şi bareme Matematică M_şt.-nat.
17. Teste de antrenament pentru examenul de bacalaureat, 2019 – 2021, CNPEE, subiecte şi bareme Matematică M_şt.-nat.

CAPITOLUL III

Modele de teste rezolvate pentru examenul de Bacalaureat

• Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii.
•Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
•Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

Testul 1

Subiectul I **(30 puncte)**

(5p) 1. Să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$, unde x_1 si x_2 sunt rădăcinile reale ale ecuației $-x^2-x+1=0$.

(5p) 2. Graficul funcției f:R→R, f(x)=-x+1 intersectează axele de coordonate în punctele A si B. Calculați lungimea segmentului AB.

(5p) 3. Rezolvați ecuația $\frac{1}{3^x}=9^{-1}$.

(5p) 4. Determinați câte numere naturale de 5 cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii {0;1;2;3;4}.

(5p) 5. Să se determine m ∈ R știind că vectorii $\boldsymbol{v_1}=\vec{\imath}-2\vec{\jmath}$ și

$\boldsymbol{v_2}=(4m-3)\vec{\imath}+(m-1)\vec{\jmath}$ au aceiași direcție.

(5p) 6. Să se calculeze aria triunghiului ABC știind că are laturile AB=5-$\sqrt{5}$,

AC=5+$\sqrt{5}$ și BC=2$\sqrt{15}$.

Subiectul II **(30 puncte)**

1. Considerăm matricea A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(5p) a) Calculați detA^{2022};

(5p) b) Determinați inversa matricei A + I_2;

(5p) c) Să se demonstreze că $X^2 \neq$ A, oricare ar fi X ∈ M_2(R).

2. Fie inelul (Z_4,+, ·).

(5p) a) Rezolvați ecuația: $\hat{2}x+\hat{2}=\hat{2}$;

(5p) b) Arătați că funcția f:$Z_4 \rightarrow Z_4$, f(x)=x^2 nu este injectivă;

(5p) c) Calculați suma: $\hat{1}^{2022}+\hat{2}^{2022}+\hat{3}^{2022}$.

Subiectul III **(30 puncte)**

1.Fie funcția f:(0, +∞)→R, f(x)= $\frac{x-ln^2(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+\ln(\sqrt{x}+1)}$:

(5p) a) Demonstrați că ecuația $f'(x)$=0 nu admite rădăcini reale;

(5p) b) Determinați mulțimea {f(x) / x ∈(0, +∞)};

(5p) c) Demonstrați că $\ln\frac{2}{3}\cdot\ln\frac{5}{4} < \frac{1}{8}$;

2.Fie integrala Riemann $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(tgx)^n\,dx$, unde n ∈ N^*.

(5p) a) Calculați I_1;

(5p) b) Demonstrați că $I_{n+2}=\frac{1}{n+1}$ - I_n, pentru orice n ∈ N^*;

(5p) c) Calculați I_7.

Testul 2

Subiectul I **(30 puncte)**

(5p) 1. Se considerâ numărul complex z=3+2i. Calculați z^2;

(5p) 2. Determinați valoarea minimă a funcției f:R→R f(x)=x^2-3x-11;

(5p) 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: 25^x-3·5^x+2=0;

(5p) 4. Numărul submulțimilor cu două elemente ale unei mulțimi este 30. Aflați numărul elementelor mulțimii.

(5p) 5. Se dau vectorii $\overrightarrow{AB}$=3$\vec{i}$+$\vec{j}$ și $\overrightarrow{CB}$= -$\vec{i}$+2$\vec{j}$. Calculați lungimea vectorului

$\overrightarrow{AC}$;

(5p) 6. Dacă sin x=$\frac{3}{5}$ și x ∈ ($\frac{\pi}{2}$; π), calculați sin 2x.

Subiectul II **(30 puncte)**

1. Fie matricea A=$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ∈ M_2(R).

(5p) a) Demonstrați că A^2+2I_2=3A;

(5p) b) Folosind metoda inducției matematice demonstrați că A^n=(2^n-

1)(A-I_2)+ I_2, pentru orice n ∈ N, n ≥2.

(5p) c) Demonstrați că $A^2+A^3+...+A^{100}=(2^{101}-103)(A-I_2)+99I_2$;

2. Pe Z_{13} definim legea asociativă "*" prin x*y=xy+$\widehat{10}$x+$\widehat{10}$y+$\widehat{12}$;

(5p) a) Arătați că x*y=(x-$\widehat{3}$)(y-$\widehat{3}$)+ $\widehat{3}$;

(5p) b) Demonstrați că x*x*x=$(x-\widehat{3})^3+\widehat{3}$ pentru orice x ∈ Z_{13};

(5p) c) Aflați x ∈ Z_{13} care verifică x*x*x*x=$\widehat{3}$.

<u>Subiectul III (30 puncte)</u>

1. Se consideră funcția f:R→R, f(x)= $\frac{x^3+4x^2+4}{x^2+1}$

(5p) a) Demonstrați că $f'(x)=\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$;

(5p) b) Demonstrați că graficul funcției f nu admite puncte de extrem;

(5p) c) Determinați ecuația asimptotei oblice la -∞ la graficul functiei f.

2. Fie funcția f:R→R, f(x)=e^x(3x+5)

(5p) a) Calculați $\int_0^1 f'(x)\,dx$;

(5p) b) Calculați $\int f(x)dx$;

(5p) c) Dacă F este o primitivă a funcției f ce verifică F(0)= -2, calculați

$\int_0^1 F^2(x)\, f(x)\, dx$

Testul 3

Subiectul I **(30 puncte)**

(5p) 1. Să se demonstreze că $\log_3 12$-2$\log_3 2$=1;

(5p) 2. Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuației x^2-3x+2022=0, calculați valoarea expresiei E= $x_1^2+x_2^2+3x_1x_2$;

(5p) 3. Să se determine m∈ R pentru care graficul funcției f:R→R, f(x)=x^2-2mx+m este tangent axei Ox;

(5p) 4. Aflați care termen din dezvoltarea $(x+\frac{2\sqrt{x}}{x})^6$, unde x∈ (0, +∞), nu îl conține pe x;

(5p) 5. Fie în reperul cartezian punctele A(1,2), B(3,8) si C(5,4). Să se demonstreze că ΔABC este dreptunghic isoscel.

(5p) 6. În triunghiul ABC avem m($\hat{A}$)=45°, m($\hat{B}$)=75° și AB=$2\sqrt{5}$ cm. Calculați lungimea laturii BC.

Subiectul II **(30 puncte)**

1. În sistemul xOy se consideră punctele $A_n(n^2$,n), n∈ N.

Fie determinantul: Δ= $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ unde a, b, c ∈ R

(5p) a) Determinați ecuația dreptei A_2A_3;

(5p) b) Arătațî că Δ=(a-b)(b-c)(c-a);

(5p) c) Știind că aria triunghiului $A_1A_2A_n$ este egală cu 55, determinați valoarea numărului n.

2. Se definește pe mulțimea numerelor reale operația

x_0 y=xy+3x+3y+6 ,pentru orice x,y∈ R

(5p) a) Demonstrați că x_0 (-3)=-3, ,pentru orice x∈ R

(5p) b) Demonstrați că $(x_0\ y)_0$ z=x_0 $(y_0$ z), ,pentru orice x,y,z∈ R

(5p) c) Calculați $(-2022)_0$ $(-2021)_0$ $\ldots_0$ 2021_0 2022

Subiectul III **(30 puncte)**

1. Fie funcția f: (0, +∞)→R, f(x)= $\frac{-\ln x}{x}$

(5p) a) Să se calculeze f'(x), pentru x∈ (0, +∞);

(5p) b) Demonstrați că f(x) ≥ $\frac{-1}{e}$, pentru orice x∈ (0, +∞);

(5p) c) Demonstrați că $\mathbf{2021^{2022}}$ >$\mathbf{2022^{2021}}$;

2. Fie integrala Riemann $\boldsymbol{I_n}$=$\int_1^e \boldsymbol{x ln^n x\ dx}$, pentru orice n∈ N.

(5p) a) Să se calculeze $\boldsymbol{I_2}$;

(5p) b) Demonstrați că $\boldsymbol{I_n}$=$\frac{e^2}{2}$ - $\frac{n}{2}$$\boldsymbol{I_{n-1}}$, pentru orice n∈ N;

(5p) c) Arătați că (n+2)$\boldsymbol{I_n}$ ≤ $\boldsymbol{e^2}$, pentru orice n∈ $\mathbf{N}^*$.

Testul 4

Subiectul I **(30 puncte)**

(5p) 1. Se consideră progresia geometrică cu termeni pozitivi: b_1; 4; b_3; 16… Să se calculeze suma primilor 10 termeni ai progresiei.

(5p) 2. Demonstrați că ecuația $2x^2$-(4m+2)x+2m(m-1)=0 admite rădăcini reale distincte, oricare ar fi m∈ R.

(5p) 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\log_{2022}(3x+1)-\log_{2022} 16=0$$

(5p) 4. Aflați câte numere natural de 5 cifre se pot forma utilizând cifrele 1, 3 si 5?

(5p) 5. Să se calculeze distanța de la punctul A(-2;1) la punctul de intersecție al dreptelor d_1: 3x-2y+1=0 și d_2: -x+3y-5=0.

(5p) 6. În triunghiul dreptunghic ABC se cunosc m($\hat{A}$)= 90° și tg$\hat{B}$=$\frac{2}{5}$.

Calculați sin$\hat{B}$.

Subiectul II **(30 puncte)**

1. Fie matricea A=$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ și M={X(a)=I_2+aA / a∈ R \ {-$\frac{1}{5}$}}

(5p) a) Demonstrați că X(a) ·X(b)=X(a+b+5ab), pentru orice a, b ≠ -$\frac{1}{5}$;

(5p) b) Demonstrați că $[X(a)]^{-1}$= X($\frac{-a}{1+5a}$), pentru orice a ≠ -$\frac{1}{5}$;

(5p) c) Arătați că înmulțirea matricelor determină o structură de grup comutativ pe mulțimea M.

2. Fie polinomul f_n=(2n-2)X^{2n-1}-(2n-1)X^{2n-2}+1, unde n∈ N, n≥2

(5p) a) Determinați toate rădăcinile complexe ale polinomului f_2;

(5p) b) Arătați că pentru orice n∈ N, n≥2 polinomul f_n admite o rădăcină dublă;

(5p) c) Să se arate că pentru orice n∈ N, n≥2 polinomul f_n are exact 3 rădăcini reale.

Subiectul III **(30 puncte)**

1. Fie funcția f:$\mathbf{R}^*$→R, f(x)=$e^x \cdot x^{-2}$

(5p) a) Să se calculeze f'(x), x∈ R^*;
(5p) b) Demonstrați că funcția f este crescătoare pe intervalul (2;3) ;
(5p) c) Demonstrați că $7e^{\sqrt{5}} \leq 5e^{\sqrt{7}}$;

2. Pentru orice n∈ N^*, definim integrala Riemann:

$I_n = \int_1^e x ln^x$ x dx

(5p) a) Să se calculeze I_1;
(5p) b) Să se demonstreze că I_n- I_{n+1}≥0 pentru orice n∈ N^*;
(5p) c) Demonstrați că $I_{2022}+I_{2021}+I_{2020}+I_{2019} \leq 1+e^2$.

Bareme de evaluare și notare
Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

• *Orice soluție corectă diferită de cea din barem este punctată corespunzător.*
• *Pentru rezolvări parțiale se acordă punctaje intermediare în limita baremului corespunzător.*
• *Oficiu: 10 puncte. Nota finală se obține prin împărțirea la 10 a punctajului total.*

Test 1

Subiectul I **(30 puncte)**

1.	$x_1+x_2=-1$, $x_1 \cdot x_2=-1$ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1 \cdot x_2}=1$	**2p** **3p**

2.	f(x)=0⇔-x+1=0⇔x=1⇒A(1;0) x=0⇒f(0)=1⇒B(0;1) AB=$\sqrt{2}$	**3p** **2p**
3.	$\frac{1}{3^x}=9^{-1}\Leftrightarrow\frac{1}{3^x}=\frac{1}{9}\Leftrightarrow\frac{1}{3^x}=\frac{1}{3^2}$ x=2	**3p** **2p**
4.	$A_5^5=\frac{5!}{(5-5)!}=\frac{5!}{0!}=120$ $A_4^4=\frac{4!}{(4-4)!}=\frac{4!}{0!}=24$ Sunt A_5^5-A_4^4= 120-24= 96 numere	**3p** **2p**
5.	$\frac{4m-3}{1}=\frac{m-1}{-2}$ (4m-3)(-2)=m-1⇔-8m+6=m-1⇔m= $\frac{7}{9}$	**2p** **3p**
6.	$AB^2+AC^2=BC^2$⇒ΔBAC dreptunghic in A $A_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=10$	**3p** **2p**

Subiectul II **(30 puncte)**

1.a)	$A^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow A^{2022}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ detA^{2022}=0	**3p** **2p**
b)	$A+I_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$, det(A+$I_2$)=1 $(A+I_2)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}$	**2p** **3p**

c)	Fie X=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$⇒$X^2$=$\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$ Din X^2=A⇒a^2+bc=c(a+d)= d^2+bc=0 Si b(a+d)=1 Din a+d≠0⇒c=0⇒a^2=d^2=0⇒a=d=0 contradictie	**2p** **3p**
2.a)	$\hat{2}$x+$\hat{2}$=$\hat{2}$⇔$\hat{2}$x=$\hat{0}$ x∈ {$\hat{0}$; $\hat{2}$}	**3p** **2p**
b)	f($\hat{0}$) = $\hat{0}^2$=$\hat{0}$; f($\hat{2}$)=$\hat{2}^2$=$\hat{4}$=$\hat{0}$ $\hat{0}$≠$\hat{2}$⇒ f($\hat{0}$)= f($\hat{2}$) ⇒ f nu este injectiva	**3p** **2p**
c)	$\hat{1}^{2022}$=$\hat{1}$; $\hat{2}^{2022}$=$\hat{0}$; $\hat{3}^{2022}$=$\hat{1}$ $\hat{1}^{2022}$+$\hat{2}^{2022}$+$\hat{3}^{2022}$=$\hat{1}$+$\hat{0}$+$\hat{1}$=$\hat{2}$	3p 2p

Subiectul III **(30 puncte)**

1.a)	f(x)= $\frac{\sqrt{x}^2-ln^2(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+ln(\sqrt{x}+1)}$ = $\frac{[\sqrt{x}-ln(\sqrt{x}+1)][\sqrt{x}+ln(\sqrt{x}+1)]}{\sqrt{x}+ln(\sqrt{x}+1)}$ =$\sqrt{x}-ln(\sqrt{x}+1)$ $\boldsymbol{f'}$(x)=$\frac{1}{2\sqrt{x}+2}$>0 ⇒ $\boldsymbol{f'}$(x)=0 nu are rădăcini reale	**3p** **2p**
b)	f'(x) >0 ⇒ f este strict crescătoare $\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x)$=0; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$=+∞; Imf= (0; +∞)	**2p** **3p**
c)	f($\frac{1}{4}$) >0⇔ $\frac{1}{2}$ >ln $\frac{3}{2}$; f($\frac{1}{16}$) > 0⇔ $\frac{1}{4}$ > ln $\frac{5}{4}$ ln $\frac{3}{2}$· ln $\frac{5}{4}$ < $\frac{1}{2}$ · $\frac{1}{4}$ ⇔ ln $\frac{3}{2}$ ·ln $\frac{5}{4}$< $\frac{1}{8}$	**3p** **2p**
2.a)	I_1=$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgx\,dx$=$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{sinx}{cosx}$dx=$\int_0^{\frac{\pi}{4}} -\frac{+cosx^1}{+cosx}$dx= -ln(cosx)$\Big\|_0^{\frac{\pi}{4}}$ Finalizare: I_1=$\frac{ln2}{2}$	**3p** **2p**

b)	$I_{n+2}+I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (tgx)^n(tg^2x+1)$dx tgx=t⇒$I_{n+2}+I_n=\int_0^1 t^n\,dt=\frac{1}{n+1}$⇔$I_{n+2}=\frac{1}{n+1}$ - I_n	**2p** **3p**
c)	$I_3+I_1=\frac{1}{2}$; $I_5+I_3=\frac{1}{4}$; $I_7+I_5=\frac{1}{6}$ $I_3+I_1+I_7+I_5$-(I_5+I_3)= $I_1+I_7=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$ $I_7=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{ln2}{2}=\frac{5}{12}-\frac{ln2}{2}$	**3p** **2p**

Testul 2

Subiectul I **(30 puncte)**

1.	$z^2=3^2+2\cdot3\cdot2i+(2i)^2$ z^2=5+12i	**3p** **2p**
2.	Δ=53 Valoarea minimă= $-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{53}{4}$	**2p** **3p**
3.	25^x-3·5^x+2=0⇔$(5^x)^2$-3·5^x+2=0 5^x=t > 0⇒t^2-3t+2=0 t_1=1> 0⇒x_1=0; t_2=2> 0⇒$x_2=\log_5 2$	**3p** **2p**
4.	C_n^2=15 $\frac{n!}{2!(n-2)!}$=15 ⇔ (n-1) ·n=30⇔n=6	**2p** **3p**
5.	$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=3\vec{i}+\vec{j}+\vec{i}-2\vec{j}=4\vec{i}-\vec{j}$ $\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{4^2+(-1)^2}=\sqrt{17}$	**3p** **2p**
6.	sin 2x=2sinx cosx, sin^2x+cos^2x=1; cos x<0 cosx= $-\frac{4}{5}$; sin2x= $-\frac{24}{25}$	**3p** **2p**

Subiectul II **(30 puncte)**

1.a)	$A^2=\begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$ Verificarea prin calcul	**3p** **2p**
b)	Etapa de verificare este realizată la punctul a). Presupunem egalitatea adevărată pentru n=k și se demonstrează pentru n=k+1 A^n=(2^n-1)(A-I_2)+ I_2⇔A^n=(2^n-1)A-(2^n-2) I_2 A^{k+1}=A·A^k=A·((2^k-1)A-(2^k-2) I_2)= (2^{k+1}-1)A-(2^{k+1}-2) I_2	**2p** **3p**
c)	A^2+A^3+…+A^{100}=(2^2-1+2^3-1+…+2^{100}-1)A-(2^2-2+2^3-2+…+2^{100}-2) I_2 A^2+A^3+…+A^{100}=(2^{101}-103)(A-I_2)+99I_2	**3p** **2p**
2.a)	(x-$\hat{3}$)(y-$\hat{3}$)+ $\hat{3}$=xy-$\hat{3}$x-$\hat{3}$y+$\hat{9}$+$\hat{3}$ -$\hat{3}$=$\widehat{10}$; finalizare	**3p** **2p**
b)	x*x=$(x-\hat{3})^2$+$\hat{3}$ x*x*x=x*[$(x-\hat{3})^2$+$\hat{3}$]= $(x-\hat{3})^3$+$\hat{3}$	**2p** **3p**
c)	x*x*x*x=$\hat{3}$⇔$(x-\hat{3})^4$+$\hat{3}$=$\hat{3}$ x=$\hat{3}$	**3p** **2p**

Subiectul III **(30 puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{(x^3+4x^2+4)'\cdot(x^2+1)-(x^3+4x^2+4)\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$ Finalizare: $f'(x)=\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$	**3p** **2p**
b)	$f'(x)=\frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}>0\Rightarrow$f crescătoare f crescătoare$\Rightarrow$ graficul nu admite puncte extremale	**2p** **3p**
c)	m=$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$=1; n=$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)$=4 ecuatia asimptotei: y=x+4	**3p** **2p**
2.a)	$\int_0^1 f'(x)$=f(x)$\Big\|_0^1$ Finalizare: $\int_0^1 f'(x)$dx=8e-5	**2p** **3p**
b)	$\int f(x)dx=\int(e^x)'(3x+5)dx=e^x(3x+5)-\int e^x(3x+5)'dx=$ $e^x(3x+5)-\int 3e^x dx$ Finalizare: $\int f(x)dx=e^x(3x+2)+C$	**3p** **2p**
c)	F(0)=2$\Rightarrow$ C=0$\Rightarrow$ F(x)= $e^x(3x+2)$ $\int_0^1 F^2(x)f(x)dx=\int_0^1 F^2(x)F'(x)dx=\int_0^1(\frac{F^3(x)}{3})'dx=$ $=\frac{F^3(x)}{3}\Big\|_0^1=\frac{F^3(1)}{3}-\frac{F^3(0)}{3}=\frac{125e^3-8}{3}$	**2p** **3p**

Testul 3

Subiectul I **(30 puncte)**

1.	$\log_3 12-2\log_3 2=\log_3\frac{12}{2^2}$ finalizare	**3p** **2p**
2.	$x_1+x_2=3$; $x_1x_2=2022$ E=$(x_1+x_2)^2+x_1x_2$=2031	**2p** **3p**

3.	Graficul functiei tangent axei OX⇒Δ=0 Δ=4m^2-4m⇒ m∈ {0;1}	**3p** **2p**
4.	$T_{k+1}=C_6^k x^{6-k}(\frac{2\sqrt{x}}{x})^k=C_6^k 2^k x^{6-\frac{3k}{2}}$ K=4⇒ T_5=240	**3p** **2p**
5.	AB=$\sqrt{40}$; AC=$\sqrt{20}$; BC=$\sqrt{20}$⇒triunghi isoscel $AB^2=AC^2+BC^2$⇒triunghi dreptunghic	**3p** **2p**
6.	m($\hat{C}$)= 60°; $\frac{AB}{\sin\hat{C}}=\frac{BC}{\sin\hat{A}}$ BC=$\frac{2\sqrt{5}\cdot\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}$⇒BC=$\frac{2\sqrt{30}}{3}$	**3p** **2p**

Subiectul II **(30 puncte)**

1.a)	A_2(4;2); A_3(9;3); A_2A_3: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix}$=0 Finalizare:x-5y+6=0	**3p** **2p**
b)	Δ=ab^2+a^2c+c^2b-b^2c-ac^2-a^2b Descompunem Δ in factori⇒Δ=(a-b)(b-c)(c-a)	**2p** **3p**
c)	$A_{\Delta A_1A_2A_n}=\frac{\lvert\Delta\rvert}{2}$ unde Δ=$\begin{vmatrix} 1^2 & 1 & 1 \\ 2^2 & 2 & 1 \\ n^2 & n & 1 \end{vmatrix}$ =(2-n)(n-1) Finalizare:n=12	**3p** **2p**

2.a)	x∘(-3)= x·(-3)+3x+3·(-3)+6 finalizare: x∘(-3)=-3	**3p** **2p**
b)	(x∘y) ∘z=(xy+3x+3y+6) ∘z=(xy+3x+3y+6)z+3(xy+3x+3y +6)+3z+6) x∘(y ∘z)=x∘(yz+3y+3z+6)=x(yz+3y+3z+6)+3x+3(yz+3y+	**3p** **2p**

	3z+6)+6 finalizare: $(x\circ y)\circ z= x\circ(y\circ z)$	
c)	$(-2022)\circ(-2021)\circ\ldots\circ2021\circ2022=$ $=[(-2022)\circ(-2021)\circ\ldots\circ(-4)\circ(-2)\circ\ldots\circ2021\circ2022]\circ(-3)$ Conform a) $\Rightarrow(-2022)\circ(-2021)\circ\ldots\circ2021\circ2022=-3$	**3p** **2p**

Subiectul III **(30 puncte)**

1.a)	$f'(x)= -\frac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot x'}{x^2}$ Finalizare: $f'(x)= -\frac{1-\ln x}{x^2}$	**3p** **2p**
b)	Punctul x=e este punct de minim global $f(x)\geq f(e), \forall x\in(0;+\infty) \Leftrightarrow -\frac{\ln x}{x} \geq -\frac{1}{e}; \forall x\in(0;+\infty)$	**3p** **2p**
c)	f strict crescator pentru $x>e\Rightarrow f(2021)<f(2022) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -\frac{\ln 2021}{2021}< -\frac{\ln 2022}{2022} \Leftrightarrow \frac{\ln 2021}{2021}>\frac{\ln 2022}{2022}$ Finalizare: $2021^{2022}>2022^{2021}$	**3p** **2p**
2.a)	$I_2=\int_1^e x\ln^2 x\,dx=\frac{x^2}{2}\cdot \ln^2 x\,\Big\vert_1^e-\int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot(\ln^2 x)'dx$ Finalizare: $I_2=\frac{e^2-1}{4}$	**3p** **2p**
b)	$I_n=\int_1^e (\frac{x^2}{2})'\cdot \ln^n x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln^n x\,\Big\vert_1^e-\frac{n}{2}\int_1^e x\ln^{n-1} x\,dx$ $I_n=\frac{e^2}{2}-\frac{n}{2}I_{n-1}$	**3p** **2p**
c)	$I_n-I_{n-1}=\int_1^e x\ln^{n-1}x\,(\ln x-1)\,dx\leq0\Rightarrow I_n\leq I_{n-1}$ Pentru orice $n\in N^*$ $e^2=2I_n+nI_{n-1}\geq2I_n+nI_n=(2+n)\,I_n$	**2p** **3p**

Test 4

Subiectul I **(30 puncte)**

1.	$b_3=\sqrt{b_2 \cdot b_4}=\sqrt{4 \cdot 16}=8$; q= $\frac{b_3}{b_2} = \frac{8}{4}$ =2 $b_1=\frac{b_2}{q} \Rightarrow b_1=\frac{4}{2}=2 \Rightarrow b_1 + b_2+\ldots+b_{10}=b_1\frac{q^{10}-1}{q-1}$ $\Rightarrow b_1 + b_2+\ldots+b_{10}= 2046$	**2p** **3p**
2.	$\Delta=(4m+2)^2$-4· $2 \cdot 2$m(m-1) Δ=4>0⇒ ecuatia admite radacini reale distincte	**2p** **3p**
3.	Conditia de existenta: 3x+1>0⇔x∈($-\frac{1}{3}$; +∞) $\log_{2022}(3x+1)$-$\log_{2022} 16$=0⇔$\log_{2022}\frac{3x+1}{16}$=0 Finalizare:x=5∈($-\frac{1}{3}$; +∞)	**3p** **2p**
4.	Numărul de numere naturale este egal cu numărul funcțiilor definite pe o mulțime cu 5 elemente cu valori intr-o mulțime cu 3 elemente Finalizare:3^5=243 numere	**3p** **2p**
5.	$d_1 \cap d_2$=B(1,2) AB=$\sqrt{(-2-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{10}$	**3p** **2p**
6.	$1+tg^2\hat{B}=\frac{1}{cos^2\hat{B}} \Leftrightarrow cos^2\hat{B}=\frac{1}{1+tg^2\hat{B}}=\frac{25}{29}$ $sin^2\hat{B}+cos^2\hat{B}=1$ $sin^2\hat{B}$>0⇒sinB=$\frac{2\sqrt{29}}{29}$	**3p** **2p**

Subiectul II **(30 puncte)**

1.a)	X(a)=$\begin{pmatrix} 2a+1 & 2a \\ 3a & 3a+1 \end{pmatrix}$; X(b)=$\begin{pmatrix} 2b+1 & 2b \\ 3b & 3b+1 \end{pmatrix}$ X(a) ·X(b)=$\begin{pmatrix} 2(a+b+5ab)+1 & 2(a+b+5ab) \\ 3(a+b+5ab) & 3(a+b+5ab)+1 \end{pmatrix}$= =X(a+b+5ab)	**2p** **3p**
b)	X(a) ·X($-\frac{a}{1+5a}$)=X(0)=I_2=X($-\frac{a}{1+5a}$) · X(a) Finalizare:$[X(a)]^{-1}$= X($-\frac{a}{1+5a}$); a≠ -$\frac{1}{5}$	**3p** **2p**
c)	Din a) ⇒lege de compoziție Se verifică axiomele grupului comutativ	**2p** **3p**
2.a)	f_2=2X^3-3X^2+1 are radacina x_1=1 f_2=(X-1)(2X^2-X-1) ⇒x_2=1 si x_3= -$\frac{1}{2}$	**2p** **3p**
b)	f_n(1)=0; $f_n{}'$(1)=0 $f_n{}''$(1) ≠0⇒x=1 rădăcină dublă	**3p** **2p**
c)	f:R→R; f(x)=$(2n-2)x^{2n-1}$-$(2n-1)x^{2n-2}$+1 unde n∈ N; n≥2 f strict descrescatoare pe (0,1) și strict crescatoare pe (-∞,0) ∪(0,1) ⇒f(x)>f(1)=0 pentru x∈ (0, ∞)\{1}⇒ $f_n$nu are alte rădăcini pozitive $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; f(0)=1⇒f are o singură radacină negativâ	**3p** **2p**

Subiectul III **(30 puncte)**

1.a)	f(x)=$\frac{e^x}{x^2}$⇒f'(x)=$\frac{(e^x)'\cdot x^2-e^x\cdot(x^2)'}{x^4}$ finalizare: f'(x)=$\frac{e^x(x-2)}{x^3}$; x∈R^*	**3p** **2p**

b)	x∈ (2,3) ⇔2<x<3⇒x-2>0 f'(x)>0; ∀x∈(2,3) ⇒ F crescatoare pe intervalul (2,3)	**3p** **2p**
c)	$\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$∈(2,3) si $\sqrt{5}$< $\sqrt{7}$⇒f($\sqrt{5}$)< f($\sqrt{7}$) $\frac{e^{\sqrt{5}}}{5}<\frac{e^{\sqrt{7}}}{7}$⇔$7e^{\sqrt{5}}<5e^{\sqrt{7}}$	**3p** **2p**
2.a)	$I_1=\int_1^e x\ln x\, dx=\int_1^e (\frac{x^2}{2})'\ln x\, dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big\|_1^e-\int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot(\ln x)'\, dx$ Finalizare: $I_1=\frac{e^2+1}{4}$	**2p** **3p**
b)	$I_{n+1}-I_n=\int_1^e x\ln^n x\,(\ln x-1)dx$ x∈ [1,e] ⇒ln1≤lnx≤lne⇒0≤lnx≤1⇒lnx-1≤0 ⇒$I_{n+1}-I_n$≤0; ∀n∈ N^*	**2p** **3p**
c)	Din a) ⇒$I_n \le I_1$, ∀n∈ N^* $I_{2022}+I_{2021}+I_{2020}+I_{2019}\le 4I_1$⇔ $I_{2022}+I_{2021}+I_{2020}+I_{2019}\le e^2+1$	**3p** **2p**

Bibliografie:

1. Brânzei D.,Zanoschi A-*Probleme cu vectori*,Editura Paralela 45, Pitești,1999
2. Dragomir L.,Draghomir A,Bădescu O.-*Probleme de matematică pentru clasa a IX-a*,Editura Paralela 45,Pitești.2019
3. Dragomir L.,Draghomir A,Bădescu O.- *Probleme de matematică pentru clasa a X-a,* Editura Paralela 45,Pitești.2019
4. Ganga M.-*Elemente de analiză matematică pentru clasa XI a,Editura MathPress* ,1997
5. Monea Mihai, Monea Steluța, Serdean Ioan, Zanoschi Adrian-*Bacalaureat 2022 pentru M-Științe ale naturii și M-Tehnologic,Editura Paralela 45,* 2021
6. Năstăsescu C, Nîță C, Brandiburu M,Joiță D.-*Culegere de probleme pentru liceu,*Editura Rotech Pro,1997
7. Zanoschi A,.Iurea G,.Popa G.,Răducanu P,.Șerdean I.,-*Bacalaureat 2021,Matematică M_mate_info,*Editura Paralela 45,Pitești,2020
8. ***Subiectele și variantele de bacalaureat publicate de ministerul educației între anii 1998 și 2017

În loc de concluzii

„*De învăţat înveţi multe şi de la toţi.*
Dar profesor nu e decât cel care te învaţă să înveţi.“
Constantin Noica

Implementarea Proiectului Rose Bac++, din cadrul Proiectului privind învăţământul secundar ROSE, Schema de granturi pentru licee a contribuit în mod decisiv la reducerea abandonului școlar și la creșterea ratei de promovare a examenului de bacalaureat a elevilor Liceului Teoretic Bogdan Vodă Hălăucești.

Pentru realizarea obiectivelor propuse, echipa de proiect a organizat activități remediale, de consiliere, de îndrumare şi orientare profesională, dar şi activități de coaching, de dezvoltare personală, de dezvoltarea a abilităților socio-emoționale, activități extracurriculare și de informare, vizite și excursii de documentare, stagii de pregătire.

Principalii beneficiari ai proiectului au fost şi vor fi elevii noştri, cei care, prin activităţile organizate, au luat contact cu abordări moderne ale actului de predare, cu noi modalităţi de învăţare, menite să le stimuleze interesul şi să-i motiveze să înveţe.

Pe lângă gradul de promovabilitate, impactul orelor remediale a fost vizibil și în notele mari obținute de elevi la examen. Din grupul țintă, format din 85 de elevi, au fost înscriși 28 de elevi din anul terminal, iar 22 de elevi au promovat examenul de bacalaureat.

Situația pe discipline a fost următoarea:

La limba și literatura română, au fost înscriși 10 elevi, promovabilitatea fiind de 100%, media disciplinei fiind 6,69.

La matematică, din cei 10 elevi înscriși, 8 au reușit să promoveze examenul, procentul de promovabilitate fiind de 80%, media fiind de 6,71. Au fost obținute 4 note peste 8.

La istorie, din 10 elevi înscriși, 9 au susținut proba, toți promovând-o, media clasei fiind 6,42, obținându-se de asemenea, 4 note peste 8.

La biologie au fost înscriși 7 elevi, 5 au promovat, procentul de promovabilitate fiind de 85,7%, media clasei fiind 8,10, iar 4 elevi au obținut note peste 9,45.

La geografie au fost înscriși 11 elevi, toți promovând această disciplină, media clasei fiind 7,29. Patru elevi au obținut note peste 8.

Utilizarea noilor tenologii a contribuit la îmbunătăţirea calitativă a procesul instructiv-educativ, la transferul funcţional al conţinuturilor, la eficienizarea activităţilor de învăţare prin asigurarea unui feed-back permanent, la formarea şi dezvoltarea capacităţilor de autoevaluare şi autoapreciere, oferind facilităţi de prelucrare rapidă a datelor, de afişare a rezultatelor, dar și bucurie, entuziasm, concentrare, atenţie, conferind autenticitate activităților desfășurate.

Toate aceste activităţi au avut darul de a-i apropia pe elevi şi profesori într-un efort comun de transmitere-receptare a noilor cunoştinţe, de dezvoltare a competenţelor cheie, sporind încrederea între actorii şcolii. Adevăratul profesor te învață din inimă și nu din carte, spune un vechi proverb.

Profesia didactică are o dimensiune umană extrem de puternică. Un profesor nu înseamnă doar competenţe pedagogice, competenţe de comunicare şi relaţionare, competenţe psiho-sociale, tehnice şi tehnologice, competenţe de management al carierei şi competenţe de evaluare a elevilor, ci şi atitudini, valori, ethos, o conştiinţă profesională.

Eficientizarea demersului didactic depinde de relaţia profesor – elev, de modul în care se asigură un echilibru între aşteptările elevilor şi obiectivele lecţiei, prin selectarea inspirată a conţinuturilor, a strategiilor şi mijloacelor didactice, de felul în care cadrul didactic ştie să utilizeze cuvântul ca mijloc de îndrumare prin întrebări, răspunsuri, indicaţii, explicaţii, aprecieri.

Proiectul a constituit o bună oportunitate de perfecţionare a stilului şi a competenţelor didactice, de familiarizare cu noile tendinţe europene în domeniul educaţiei, nu doar pentru profesorii participanţi, ci pentru toate cadrele didactice ale Liceului Teoretic *Bogdan Vodă* Hălăuceşti, pentru că „*o şcoală în care profesorul nu învaţă şi el, e o absurditate.*“ [1]

Iată și câteva gânduri[2] ale elevilor participanți în proiect:

„Proiectul Rose a fost unul foarte important deoarece am dobândit multe cunoștințe dar am și aprofundat unele noțiuni . Totodată consider că a fost o pregătire suplimentară pentru examenul de bacalaureat, care m-a ajutat foarte mult. ” (Delia Brașoveanu)

„Programul ROSE mi-a oferit șansa de a-mi îmbogăți cunoștințele în domeniile pe care le-am avut ca bază in liceu. Prin intermediul acestui proiect am realizat și o conexiune specială cu profesorii,reușind să acumulez informații benefice,nu doar în context școlar ci și pentru viața cotidiană. Acest

[1] Constantin Noica - *Jurnal filozofic* (1993)
[2] *Repere cultural-educaționale, Nr.7, Despre ROSE și impactul său* – prof. Alina Cășuneanu, p.73

proiect m-a ajuat să imi depășesc limitele și să leg o relație frumoasă cu profesorii, care au fost mereu alături de noi.”(Miruna Mihăeş) .

„În cadrul pregătirii de la Rose am avut ocazia de a mă întâlni cu un nou tip de abordare în ceea ce privește pregătirea examenului de Bacalaureat. Interesul crescut al profesorilor și metodele de explicare a noțiunilor au fost adaptate pentru ca fiecare elev în parte să înțeleagă informațiile cât mai bine.În acest sens,în cadrul pregătirii Rose, a fost sporit nu doar interesul elevilor ci și al profesorilor.Deasemeni Rose a reprezentat un punct de sprijin extrem de important pentru bacalaureat.” (Geanina Clopoțel)

„Pentru mine proiectul ROSE a reprezentat o mare oportunitate și un ajutor foarte mare în ultimul an de liceu. Orele de pregătire din cadrul acestui proiect s-au mulat perfect pe nevoile noastre de elevi care urmează să dea bacalaureatul. Au fost ore de pregătire interactive și educative, intr-un cadru relaxant, care ne-au ajutat să ne consolidăm cunoștințele pentru a reuși să facem față acestui examen important.

Totodată, acest proiect ne-a ajutat și din punct de vedere emoțional, pentru că profesorii au fost atenți ca noi să nu lăsăm stresul și presiunea examenului să ne afecteze într-un mod negativ. Legatura noastră cu profesorii a fost una apropiată și s-a întarit pe tot parcursul orelor de pregătire pentru că au fost alaturi de noi și am trecut împreună prin ultimul an de liceu, unul cu multe provocări pentru noi.

Pe mine m-a ajutat foarte mult pentru că nu am mai simțit nevoia să fac pregătire în particular pentru materiile de bacalaureat și pentru că a fost un mediu familiar, unde am fost cu profesorii de la clasa și cu colegii.” (Cătălina Gurgu)

Reunirea materialelor utilizate pe parcursul desfăşurării proiectului în paginile prezentului ghid constituie un demers menit să ofere modele de valorificare a relaţiei informare-formare la nivelul mesajelor pedagogice proiectate în sensul simplificării, schematizării, esenţializării, prin corelarea intra şi interdisciplinară a cunoştinţelor, cu trecere de la pedagogic către social, de perfecţionare a activităţii didactice printr-o raportare permanentă la ceea ce gândesc şi simt, precum şi la modul în care se comportă elevii, în spiritul paradigmei curriculumului şi a tendinţelor educaţionale actuale.

ROSE BAC++
LICEUL TEORETIC
BOGDAN VODĂ
HĂLĂUCEŞTI - IAŞI
TEL. 0232 717 513
FAX: 0232 715 671
www.liceulhalaucesti.ro

***

editura pim
Tipar digital realizat la Tipografia PIM
Șoseaua Ștefan cel Mare și Sfânt nr. 109
Iași – 700497
Tel.: 0730.086.676, 0732.430.407
Fax: 0332. 440.715
Email: editura@pimcopy.ro
www.pimcopy.ro
Bun pentru tipar – nov. 2022

Proiectul privind învăţământul secundar ROSE
Schema de granturi pentru licee

ROSE BAC++

LICEUL TEORETIC
BOGDAN VODĂ
HĂLĂUCEȘTI
TEL. 0232 717 513
FAX. 0232 715 671

www.liceulhalaucesti.ro